Differentialrechnung I für Klasse 11

Michael Spielmann

Inhaltsverzeichnis

1 Steigung von Kurven **2**

2 Begriff der Ableitung **4**
2.1 Berechnung eines Differentialquotienten 5
2.2 Ableitungsfunktion 5
2.3 Interpretation der Ableitung 5

3 Beweise einiger Ableitungsregeln **6**
3.1 Potenzfunktion $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ 6
3.2 Ableitung von Polynomen 6

4 Kurvendiskussion **8**

5 Genauere Fassung des Tangentenbegriffs **10**

6 Lösungen der Aufgaben **11**

1 Steigung von Kurven

Wir stellen uns die Aufgabe, die Steigung einer Kurve zu bestimmen.

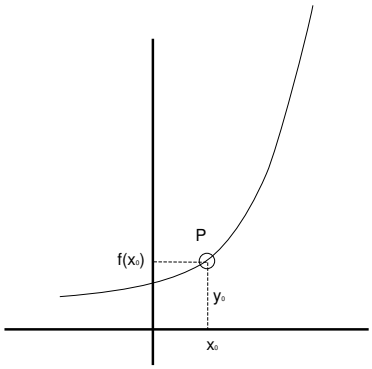

Abbildung 1: Steigung einer Kurve

Das ist nicht so einfach; denn die Steigung einer Kurve wechselt von Punkt zu Punkt, nur bei Geraden ist die Steigung konstant. Die Steigung von Geraden haben wir mittels des Steigungsdreiecks veranschaulicht und mittels eines Quotienten berechnet.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Geradensteigung.

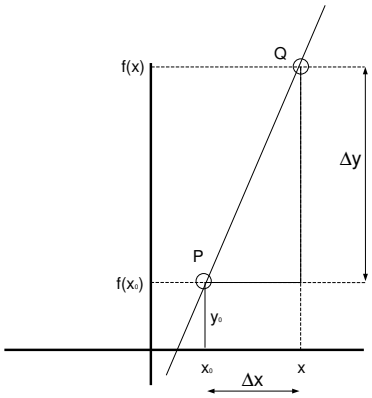

Abbildung 2: Steigung von Geraden

$$m = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Weitendifferenz}}$$

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

wird Differenzenquotient genannt. Manchmal schreibt man den Quotienten in der aus der Physik bekannten Delta-Schreibweise.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Um den Differenzenquotienten aufzustellen, benötigt man 2 Punkte, deren Höhen- und Weitendifferenz in Beziehung gesetzt wird. Suchen wir die

Steigung in einem einzigen bestimmten Punkt, fehlt uns der zweite Punkt. Als erste Annäherung an einen Steigungswert der Kurve wählen wir einen beliebigen zweiten Punkt, nicht allzu weit vom ersten entfernt, und bestimmen die Steigung der Sekante. Es ist natürlich keine gute Lösung; aber wenn die Punkte nah beieinander liegen, ist die Lösung nicht schlecht. Aus der Erfahrung mit Geschwindigkeiten wissen wir, dass auf einem Zeit-Intervall die Momentangeschwindigkeit meist von der Durchschnittsgeschwindigkeit abweicht; wenn aber das Intervall klein ist, stimmen beide ganz gut überein.

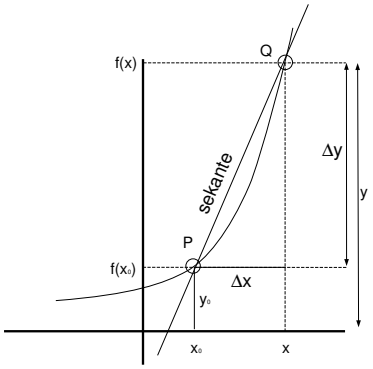

Abbildung 3: Steigung der Sekante als Ersatz

Jetzt haben wir genügend Ideen gesammelt, um das Problem zu lösen. Wir lassen den zweiten Punkt (hier Q genannt) auf den ersten (hier P genannt) zulaufen, beobachten die Werte der Steigung, und stellen fest, dass sie sich einem festen Wert nähern. Den nehmen wir als Steigungswert im Punkt P.

Geometrisch sieht es so aus, dass die Sekante in eine Tangente übergeht. Das dabei entstehende logische Problem, wie aus einer Sekante eine Tangente werden kann, diskutieren wir später.

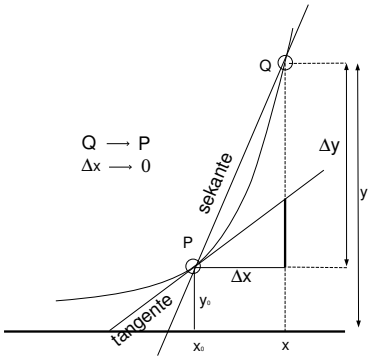

Abbildung 4: Steigung der Tangente als Ersatz

Die Bewegung von Q auf P zu kann man einfach dadurch beschreiben, dass man die passenden x-Werte aufeinander zulaufen lässt. An einem Beispiel beobachten wir die Änderung der Sekantensteigung, wenn Q dem P näherkommt. Wählen wir $y = f(x) = x^2$ und $P(1.5/2.25)$.

x	$y = x^2$	m
2	4	$\frac{4-2.25}{2-1.5}$=3.5
1.7	2.89	$\frac{2.89-2.25}{1.7-1.5}$=3.2
1.6	2.56	$\frac{2.56-2.25}{1.6-1.5}$= 3.1
1.51	2.2801	$\frac{2.2801-2.25}{1.51-1.5}$=3.01
1.501	2.253001	$\frac{2.253001-2.25}{1.501-1.5}$ = 3.001

Man sieht sehr deutlich, dass sich die Sekantensteigung auf den Wert 3 zubewegt.

Das Ende dieses Näherungsprozesses nennt man Grenzwert. Leider müssen wir uns hier mit einer naiven Auffassung des Grenzwertbegriffes begnügen.

2 Begriff der Ableitung

Definition 2.1 *Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, dann nennen wir ihn ,,Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0".

Den Quotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nennen wir ,,Differenzenquotient", manchmal schreiben wir ihn in der Form $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; den Grenzwert nennen wir ,,Differentialquotient" und schreiben oft mit sogenannten Differentialen $\frac{dy}{dx}$, was wir später erklären werden, oder auch einfach $f'(x_0)$ (lies: f strich von x null), wenn wir ihn auf eine bestimmte Stelle x_0 beziehen.

Anmerkung 2.1 *Den Prozess $x \to x_0$ kann man unterschiedlich beschreiben. Man kann sagen $\Delta x \to 0$, oft liest man stattdessen $h \to 0$. Wir finden also für den Differentialquotienten unterschiedliche Schreibweisen:*

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Anmerkung 2.2 *Da Zähler und Nenner des Quotienten beide gegen Null gehen, kann man sie nicht einzeln untersuchen. Man muss den Quotienten also mehr oder weniger raffiniert umformen, damit der Grenzwert ,,leicht" zu bestimmen ist.*

2.1 Berechnung eines Differentialquotienten

Wir werden die Steigung nicht immer mit einer Tabelle bestimmen wollen. Ein allgemeines Verfahren wäre günstiger. Also sehen wir uns das am Beispiel $f(x) = x^2$ an. Der gefragte Punkt sei $P(x_0/x_0^2)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} (x+x_0) \\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir die Binome kennen sollten.

Alternativ rechnen wir die Aufgabe mit der h-Schreibweise.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Eine etwas andere Technik, hier lösen wir ein Binom auf, oben haben wir es faktorisiert.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

Die Steigung einer Normalparabel ist also offenbar gleich dem doppelten x-Wert.

2.2 Ableitungsfunktion

Da die Ableitung an beliebiger Stelle x_0 berechnet werden kann, können wir die Ableitung einer Funktion wiederum als Funktion auffassen, und schreiben dann oft $f'(x)$ oder auch noch kürzer y'. Mit $f'(x)$ meinen wir also künftig die Ableitungsfunktion; mit $f'(x_0)$ meinen wir die Ableitung an der festen Stelle und sprechen dann geometrisch von Steigung an der Stelle.

2.3 Interpretation der Ableitung

Ableitung ist eine momentane Änderungsrate. Sie ist als der Grenzwert einer mittleren Änderungsrate definiert, also als ,,Verhältnis" aus der Differenz zweier Werte der abhängigen Variablen (Δy) und der Differenz zweier Werte der unabhängigen Variablen (Δx). Verhältnis setze ich hier in Anführungszeichen, da die Nennerdifferenz verschwindend klein wird (Grenzwert mit $\Delta x \to 0$).

Beschreibt die Funktion ein Geländeprofil, ist es naheliegend, nach der Steigung zu fragen; dies wäre ein geometrischer Aspekt der Ableitung.

Beschreibt die Funktion einen Zeit-Weg-Zusammenhang, kann die Frage nach der Geschwindigkeit interessant sein; dies wäre ein physikalischer Aspekt der Ableitung.

Beschreibt die Funktion einen Gewinn abhängig von der Stückzahl produzierter Güter, kann die Frage nach dem momentanen Gewinn pro Gut interessant sein; dies wäre ein betriebswirtschaftlicher Aspekt der Ableitung.

Und als letztes Beispiel lassen wir die Funktion die Entwicklung einer Population beschreiben. Dann ist die Ableitung die momentane Änderung der Populationsgröße; dies wäre ein populationsdynamischer Aspekt der Ableitung.

3 Beweise einiger Ableitungsregeln

3.1 Potenzfunktion $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

Da $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$, kann man auch x^3 leicht ableiten. Man erhält

$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$$

Aufgabe 3.1 *Bestimme auf zwei Arten die Ableitung von $y = x^3$.*

Aufgabe 3.2 *Beweise, dass $x^4 - x_0^4 = (x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3)$*
Das kann man durch Ausmultiplizieren oder mit Poynomdivision zeigen.

Aufgabe 3.3 *Beweise, dass*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i$$

Nach diesen Aufgaben sind wir ziemlich sicher, dass für positive Exponenten n gilt

$$y = f(x) = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

Anmerkung 3.1 *Gilt eine solche Regel auch für negative Exponenten und sogar für gebrochene? Das werden wir erwarten können, aber wir beweisen es erst in der Jahrgangsstufe 12.*

3.2 Ableitung von Polynomen

Bisher haben wir nur einzelne Potenzen abgeleitet. Polynome bestehen aber aus Summen von Vielfachen von Potenzen. Wenn wir die ableiten, muss uns klar sein, was mit multiplikativen Konstanten passiert, und natürlich auch, wie man überhaupt eine Summe ableitet. Uns erwarten dort keine schwerwiegenden Probleme.

Satz 3.1 *Multiplikative Konstanten bleiben beim Ableiten erhalten.*

$$f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$$

Beweis 3.1

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{a\cdot g(x)-a\cdot g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} a\cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= a\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= a\cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Satz 3.2 *Additive Konstanten fallen beim Ableiten weg.*

$$f(x) = g(x) + b \Rightarrow f'(x) = g'(x)$$

Beweis 3.2 Aufgabe 3.4 *Beweise den Satz.*

Satz 3.3 *Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der einzelnen Ableitungen.*

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Beweis 3.3

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x)+h(x))-(g(x_0)+h(x_0))}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x)-g(x_0))+(h(x)-h(x_0))}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \\
&= g'(x_0) + h'(x_0)
\end{aligned}$$

Wir können es auch mit der h-Methode beweisen; natürlich darf man dann nicht $h(x)$ benutzen. Wir leiten $f(x) = p(x) + q(x)$ ab.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(p(x+h)+q(x+h))-(p(x)+q(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(p(x+h)-p(x))+(q(x+h)-q(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{p(x+h)-p(x)}{h} + \frac{q(x+h)-q(x)}{h}\right) \\
&= p'(x) + q'(x)
\end{aligned}$$

4 Kurvendiskussion

Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir genauere Informationen über den Kurvenverlauf gewinnen, die uns eine Tabelle nur bei sehr feiner Schrittweite liefert.

Die Bestimmung von Nullstellen ist ein Kapitel für sich. Dazu findet man einiges im Skript über Polynome. Mit der Ableitung können wir Extrema und Wendepunkte der Graphen bestimmen.

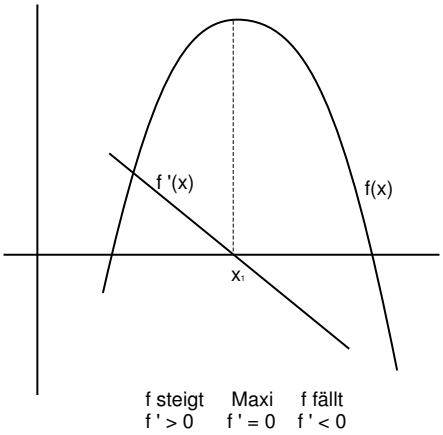

Abbildung 5: f hat Maximum

Eine differenzierbare Funktion besitzt an der Stelle x_1 ein **Maximum**, wenn sie dort eine waagerechte Tangente hat und vorher positiv und nachher negativ steigt. Das bedeutet, dass die Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel $+-$ besitzen muss.

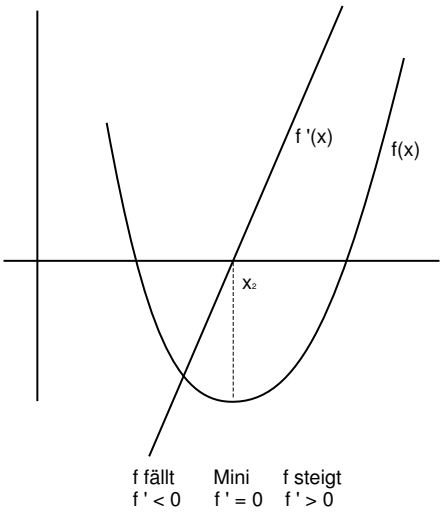

Abbildung 6: f hat Minimum

Eine differenzierbare Funktion besitzt an der Stelle x_2 ein **Minimum**,

wenn sie dort eine waagerechte Tangente hat und vorher negativ und nachher positiv steigt. Das bedeutet, dass die Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel $-+$ besitzen muss.

Sollte der Graph positiv ansteigen, dann bei x_3 eine waagerechte Tangente haben und danach weiter positiv ansteigen, sprechen wir von **Sattelpunkt**. Ebenso sprechen wir von Sattelpunkt, wenn der Graph fällt, ei-

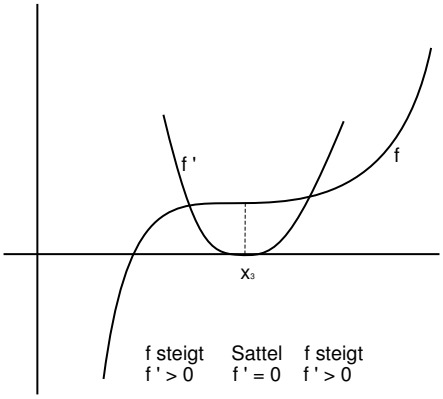

Abbildung 7: f hat Sattelpunkt

ne waagerechte Tangente hat und weiter fällt. Ein Sattelpunkt liegt also dann vor, wenn die Ableitung eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel besitzt. Interessant sind auch diejenigen Stellen, an denen der Graph von einer

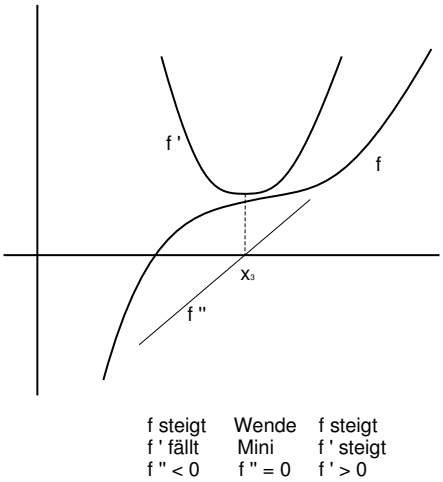

Abbildung 8: f hat Wendepunkt

Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt übergeht. Wir nennen einen solchen Punkt **Wendepunkt**.

Eine Rechtskurve zeichnet sich dadurch aus, dass die Steigung beständig kleiner wird; in einer Linkskurve wird die Steigung beständig größer. Man

überlege sich, dass diese Beschreibung auch im Falle negativer Steigung gilt! Offensichtlich liegt ein Wendepunkt vor, wenn die Ableitung der Funktion ein Extremum besitzt. Ein Wendpunkt liegt also dann vor, wenn die 2. Ableitung (die Ableitung der Ableitung) eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Aufgabe 4.1 *Untersuche auf Extrema und Wendepunkte, zeichne Funktion und Ableitung:* $f(x) = 0.05x^4 + 0.2x^3 - 0.4x^2 - 2.4x$

5 Genauere Fassung des Tangentenbegriffs

Wir wissen ziemlich genau, was eine Tangente ist; wir haben ja seinerzeit gelernt, dass eine Tangente eine Gerade ist, die mit der Kurve, an der sie anliegt, genau einen gemeinsamen Punkt hat. Nur hat diese Erklärung einen gravierenden Nachteil. Sie funktioniert prima bei Kreisen, da es gar nicht anders denkbar ist: entweder läuft eine Gerade am Kreis vorbei, oder sie berührt, oder sie schneidet zweimal (beim Eindringen und beim Verlassen des Kreises). Sie funktioniert bei Parabeln schon nicht mehr so gut, denn eine zur y-Achse parallele Gerade hat mit der Parabel auch nur einen gemeinsamen Punkt, ist aber natürlich keine Tangente. Schränkt man die Geraden auf nicht-senkrechte ein, klappt wieder alles. Bei Potenzfunktionen dritten Grades haben wir vollends Schwierigkeiten, da die Tangente die Kurve meistens schneidet, ja manchmal sogar durchdringt bei gleichzeitigem „Berühren".

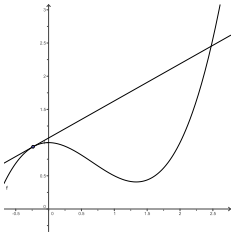

Abbildung 9: Tangente schneidet

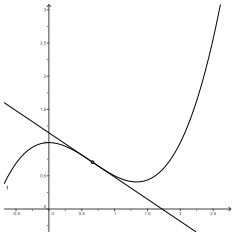

Abbildung 10: Tangente durchdringt

Wir müssen den Tangentenbegriff also neu erklären. Das machen wir mit Hilfe der Definition der Steigung. Hier könnte man einen Zirkelschluß vermuten: Steigung haben wir doch mit der Tangente erklärt! Nein, das haben wir nicht. Wir haben den Sachverhalt nur geometrisch anschaulich faßbar gemacht. Steigung haben wir als Grenzwert definiert.

Definition 5.1 *Tangente ist eine Gerade, die mit der Kurve einen Punkt gemeinsam hat und dort dieselbe Steigung wie die Kurve hat.*

Mit diese Definition können wir Tangententerme bestimmen. Für die zwei Parameter m und n der Geradengleichung benötigen wir zwei Informationen: Punkt und Steigung; die Aufgabe ist lösbar.

Beispiel 5.1 *Bestimme die Tangente an den Graphen von* $f(x) = x^2$ *in* $P(1.5/2.25)$

$$t(x) = mx + n$$
$$t(1.5) = 2.25 \qquad m = 3$$
$$2.25 = 3 \cdot 1.5 + n \Rightarrow n = -2.25$$
$$\Rightarrow t(x) = 3x - 2.25$$

6 Lösungen der Aufgaben

Lösung 3.1:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2$$

oder mit h geschrieben

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Lösung 3.2: ausmultiplizieren

$$(x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3) = x^4 - x^3x_0 + x^3x_0 - x^2x_0^2 + x^2x_0^2 - xx_0^3 + xx_0^3 - x_0^4 = x^4 - x_0^4$$

Lösung 3.3:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

ausmultiplizieren, innere Glieder heben sich alle weg:

$$= a^{n+1} - a^n b + a^n b - a^{n-1}b^2 + \cdots + a^2 b^{n-1} - ab^n + ab^n - b^{n+1}$$

Lösung 3.4:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) + b - (g(x_0) + b)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) + b - g(x_0) - b}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(x_0) \end{aligned}$$

Lösung 4.1:
$f'(x) = 0.2x^3 + 0.6x^2 - 0.8x - 2.4 = 0.2(x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$
$= 0.2(x+3)(x+2)(x-2)$ einfache Nullstellen $x_1' = -3; x_2' = -2; x_3' = 2$ mit VZW $-+$, Minimum bei $x = -3$; VZW $+-$, Maximum bei $x = -2$; VZW $-+$, Minimum bei $x = 2$.
$f''(x) = 0.2(3x^2 + 6x - 4)$; Nullstellen -2.53 und 0.53 einfach, mit VZW, also WP.

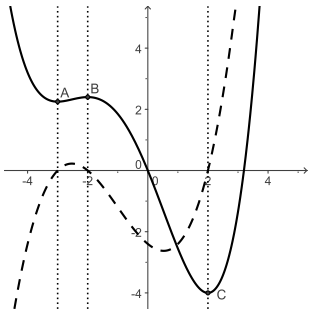

Abbildung 11: Graph, Ableitung

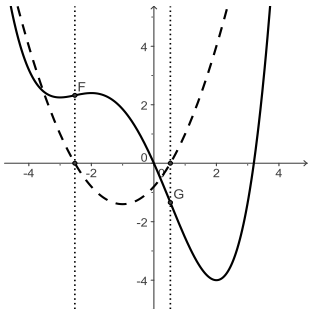

Abbildung 12: Graph, 2.Ableitung