Origami im Mathematikunterricht

Leitung des workshops: StDir. Michael Spielmann, Solingen

Die japanische Papierfaltkunst ORIGAMI ist vielen schon einmal begegnet. Wir kennen kunstvolle Blumen und Tiergebilde, die aus einem Blatt Papier durch Falten und Knicken entstehen. Oft wird das gesamte Kunstwerk aus einem einzigen Blatt erstellt.

Die Fortbildung orientiert sich an dem Buch

DAVID MITCHELL: MATHEMATICAL ORIGAMI, TARQUIN PUBLICATIONS 2003

Ich möchte hier das sogenannte modulare Origami vorstellen, bei dem Körper aus gleichartigen Modulen zusammengesetzt werden.
Das modulare Origami ist wegen seiner etwas geringeren Komplexität besser für ungeübte Hände geeignet. Wenn eine ganze Klasse Module faltet, hat man sehr schnell genügend Bauteile, um den entsprechenden Körper zusammenzusetzen. Einige wenige Körper-Modelle regen dann zum weiteren Bauen an.
Schüler haben heutigen Tags zunehmend Probleme mit der räumlichen Vorstellung geometrischer Gebilde. Platonische Körper aus Holz oder Kunststoff sind im Klassenraum oft nicht zur Hand; geometrische Bausätze wie Zometool oder Polydron sind teuer.
Wir wollen für den Mathematikunterricht Modelle platonischer Körper herstellen, die leicht zusammenzusetzen sind, ohne Kleber halten, auseinandergenommen leicht transportierbar sind, wegen des geringen finanziellen Aufwandes in großer Zahl erstellt werden können. Und die darüber hinaus den Vorteil haben, dass man sie nach Bedarf beschriften kann.

- Die platonischen **Standardkörper** Würfel, Tetraeder und Oktaeder sind nach den hier vorgestellten Mustern leicht nachzubauen. Ikosaeder und Dodekaeder sind wegen der großen Zahl an Modulen etwas komplizierter, leider auch nicht ganz so stabil.
- Aber auch **Skelettmodelle** (Spantenmodelle) von Oktaeder und Würfel sind lehrreich.
- Ein Würfel mit eingedrückter Ecke (**Kolumbus-Würfel**) eignet sich zur Beschreibung von Lagebeziehungen verschiedener Ebenen; für höhere Klassen regt er zur zeichnerischen oder rechnerischen Bestimmung von Winkeln im Raume an.
- **Schiefe Pyramiden** kann man zu größeren zusammenstellen. Das regt die geometrische Phantasie an.

Warum sollen Schüler Origami machen?
Sauberes Knicken und Falten sowie vorsichtiges Handhaben von glattem Papier verbessern die Feinmotorik. Das Herstellen eines Körpers ist ein kreatives Erlebnis. Schüler stellen gerne etwas her, was dann auch zu Unterrichtszwecken genutzt werden kann.
Will man nicht allein das Falt-Erlebnis vermitteln, sondern auch klassische geometrische Fragen an den erstellten Körpern beantworten, so zeigen sich die herkömmlichen Strategien des Geometrieunterrichts in neuem Licht. Kongruenz und Ähnlichkeit, Konstruktion und trigonometrische Rechnung sind aus der Problemstellung erwachsen, und sie gewinnen dadurch an Sinn und Bedeutung.
Die Kontrolle des Erfolges stellt sich recht schnell ein. Wenn ein nachlässig gefaltetes Modul den Gesamteindruck stört, wird man besser und genauer falten. Ein sauber zusammengesetztes Polyeder ist für die meisten Menschen ein ästhetisches Erlebnis. Ich habe bei allen meinen Klassen und auch in den Fortbildungsveranstaltungen mit Lehrern noch nie erlebt, dass ein Teilnehmer nicht zufrieden gelächelt oder sogar gestrahlt hätte, nachdem ihm mit seinem Nachbarn ein Polyeder gut gelungen ist.

Beobachtungen und Hinweise:
Die Faltmuster der verschiedenen Polyeder sind in ihrer Größe nicht aufeinander abgestimmt. Es erfordert ein wenig geometrisches Überlegen, die Vorgabe so anzupassen, dass das Tetraeder und das Oktaeder zum Würfel passen.

Schülern einer Klasse 10 war nicht ohne weiteres klar, dass die Kanten eines Oktaeders im Winkel von 45° zur Zwischenebene stehen, dass also sich abwechselnd treffende Kanten orthogonal zueinander stehen.

Jeder Schüler sollte jeden Körper mehrmals selbsttätig zusammensetzen.

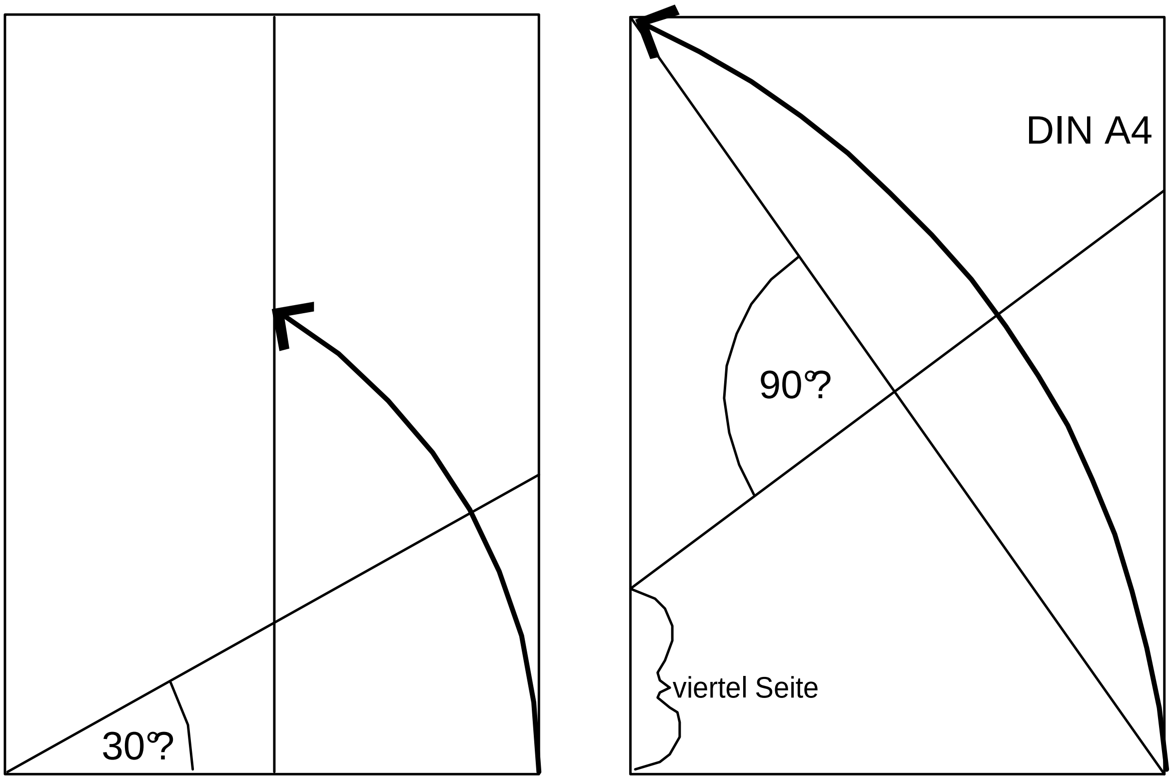
Der erfahrene Lehrer wird zunächst zweifelnd fragen, wie soll ich denn 30 Schülern gleichzeitig die verschiedenen Schritte erklären. Man kann es, wenn die Schüler sich auf Stille einlassen. Für ein Modul braucht man nicht mehr als eine Viertelstunde; dann können die Schüler wieder ungeführt arbeiten. Der Lehrer sollte vielleicht das Modul aus weißem Papier an der Wandtafel falten, dann können die Schüler im optischen Kontrast ganz gut die Knicke und Falten erkennen.

Sicher ist es unter urheberrechtlichem Aspekt nicht unproblematisch, Kopien der Vorlagen zu fertigen.

Günstige Reihenfolge:
1. Würfel, Würfel mit eingedrückter Ecke (Kolumbuswürfel), Würfel-Turm, Würfel-Ring
2. Tetraeder
3. Oktaeder
4. Skelett Oktaeder
5. Ring aus Rhomben-Tetraedern

Zeitbedarf:
Nur für die Faltarbeiten allein muss man einen Zeitbedarf von jeweils 45 Minuten für 1., 2.+3., 4+5 kalkulieren.
Kommen die geometrischen Zusatzfragen hinzu, benötigt man für die Lösungen am Kolumbuswürfel nochmals etwa zweimal 45 Minuten.

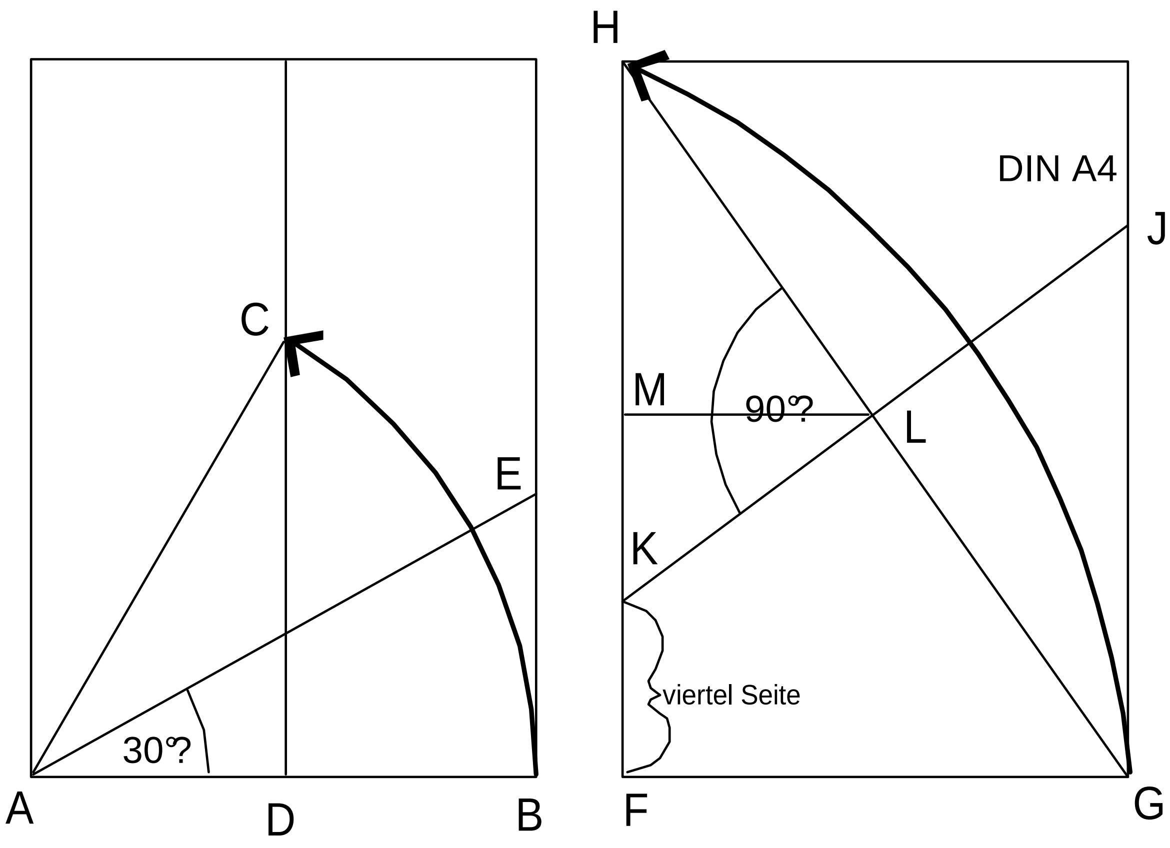
Zusätzliche Fragen und Aufgaben:

1. 

   Die Winkel entstanden durch Faltung. Begründe die Winkelgröße.

2. **Begründe, dass die eine Rechteck-Seite geviertelt wird.**

Lösung der Aufgabe



zu 1.

$$AB = AC\ (Spiegelung)$$
$$CA = CB\ (C\ auf\ Symmetrieachse)$$
$$\Rightarrow \Delta ABC\ gleichseitig$$

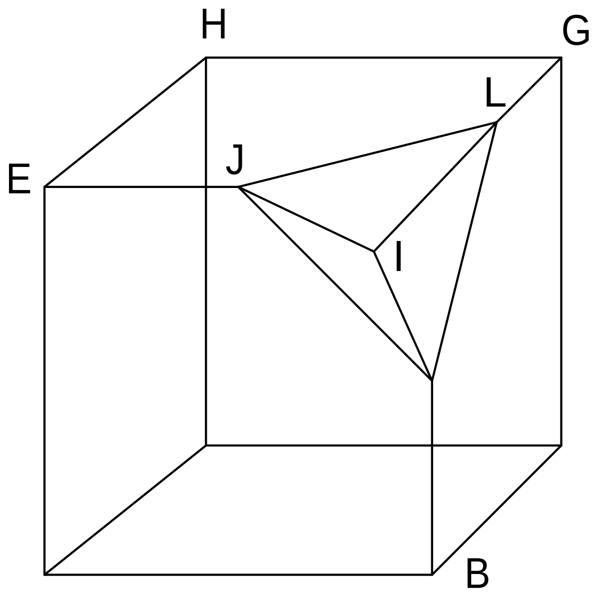
zu 2.

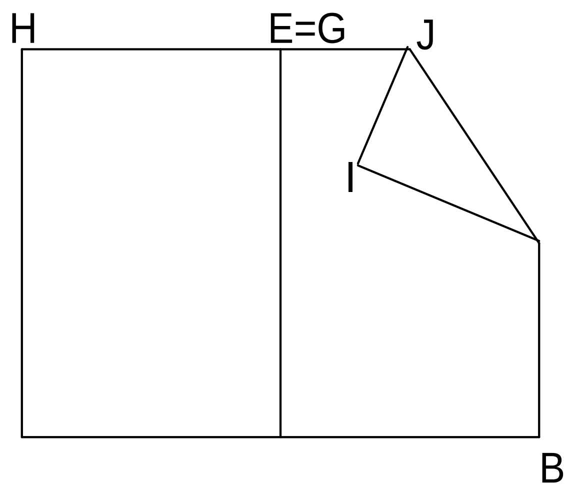
$$H\ Spiegelpunkt\ von\ G\ an\ KJ$$
$$\Rightarrow \alpha = 90°$$
$$M\ Seitenmitte;$$
$$ML\ Höhe\ in\ \Delta HKL$$
$$\Rightarrow ML^2 = HM \cdot MK$$
$$\sqrt{2}ML = HM\ (DIN-Format)$$
$$\Rightarrow ML^2 = \frac{1}{2}HM^2$$
$$\Rightarrow MK = \frac{1}{2}HM \Rightarrow KF = \frac{1}{4}HF$$

3. **Kolumbus-Würfel: In welchem Winkel stehen die nach innen gewandten Ecken zu den Seitenflächen?**
   Die Aufgabe kann zeichnerisch (Klasse 7) und rechnerisch (Klasse 10) gelöst werden.

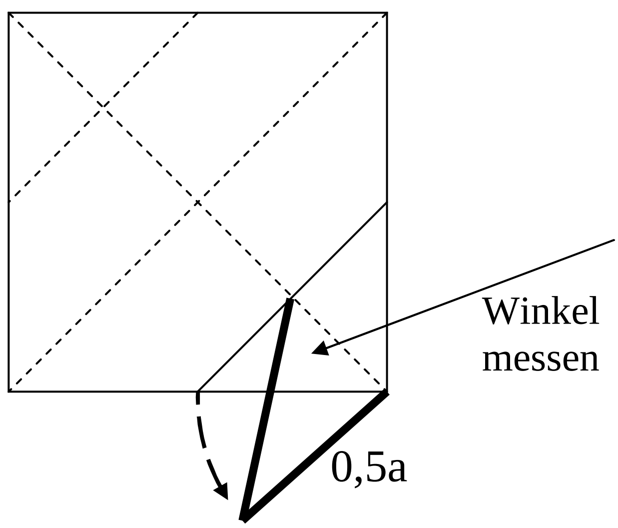
4. **Begründe, dass der innere Punkt I auf der Raumdiagonale des Würfels liegt!**

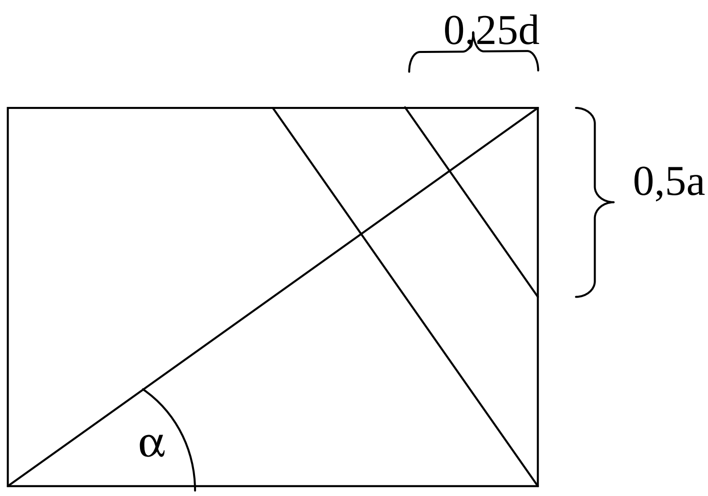
5. **Wo genau liegt er auf der Raumdiagonale?**





Bei der Lösung der Aufgaben kann die Tatsache helfen, dass die nach innen gewandte Würfelecke vorher nach außen zeigte; ihre Form hat sich nicht geändert; sie wurde an der Dreiecksfläche gespiegelt.





Lösungshilfen:
JL teilt die Flächendiagonale HF in 1:4.
Die Flächendiagonale d kann zeichnerisch ermittelt werden.
Rechnerisch bestimmt man die Winkel über tangens zu 54,7° oder 35,3° beziehungsweise 109,5° oder 70,5°.

Mit Strahlensatz weisen wir nach, dass I auf einem Drittel der Raumdiagonale liegt.

Man kann mehrere Kolumbuswürfel stapeln. Ab 5 Würfeln wird der Turm instabil. Die meisten Personen, die einen Kolumbuswürfel auf die Spitze eines anderen Kolumbuswürfels setzen wollen, platzieren ihn falsch; man muss durch Drehung nachbessern.

Noch schöner ist die Zusammenstellung zu einem Ring.

6. **Passen die 5 Würfel exakt zu einem Ring zusammen?**

Nein; der nächste Würfel ist in seiner Position um 70,5° gedreht; das ergibt eine Differenz von 1,5°, die im Modell nicht auffällt.

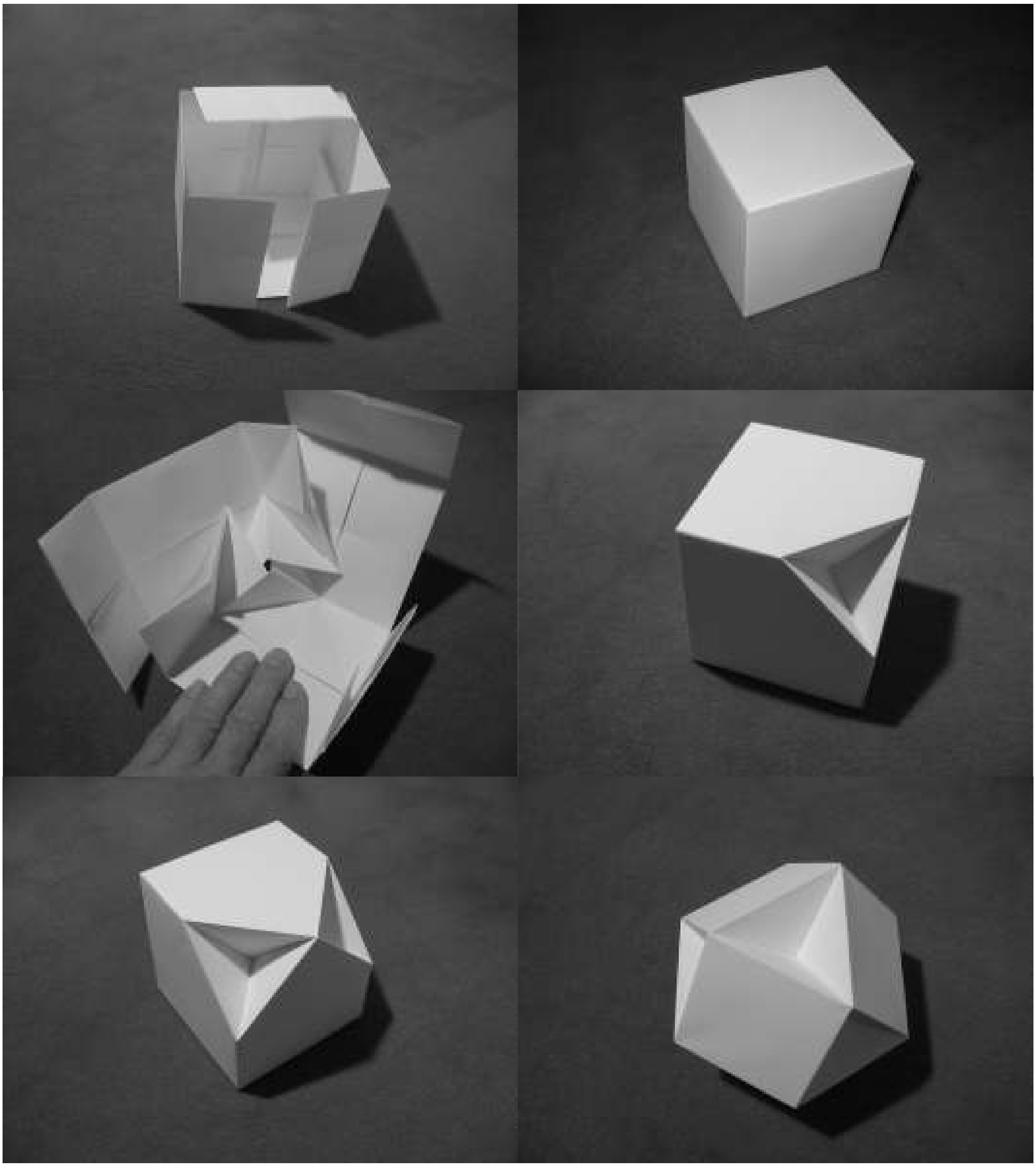
7. **Wie muss man die Module falten, damit benachbarte Würfelecken eingeknickt sind?**

8. **Wie muss man falten, damit raumdiagonal entgegengesetzte Ecken eingeknickt sind?**

9. **Das Eindrücken aller 8 Ecken führt zu einem Kuboktaeder.**

Das Kuboktaeder ist nicht leicht zusammenzusetzen. Bei der Montage des letzten Moduls empfiehlt sich ein langer Bleistift als Hilfe.

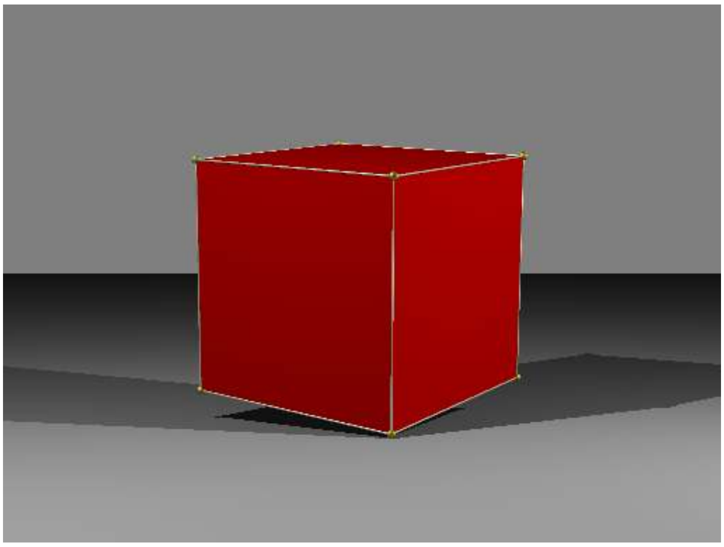
Hier einige Bilder zum Werdegang der Körper.



Wie wirkt ein Würfel? Ästhetik und Raum-Empfinden

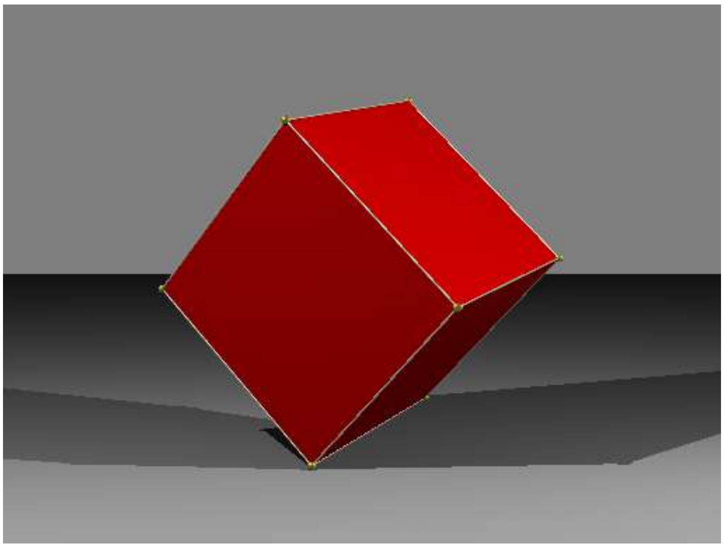
Diese Frage ist nur scheinbar sinnlos. Wir stellen uns einen Würfel üblicherweise in der Position vor, dass er auf einer Seitenfläche liegt. Wir sind es gewöhnt, ihn nach einem Wurf in dieser Lage vorzufinden, und so zeichnen wir ihn auch im Schrägbild. Eine dynamische Auffassung des Körpers lässt andere Lagen zu.

Außer der eben beschriebenen möchte ich zwei weitere in den Blick nehmen.



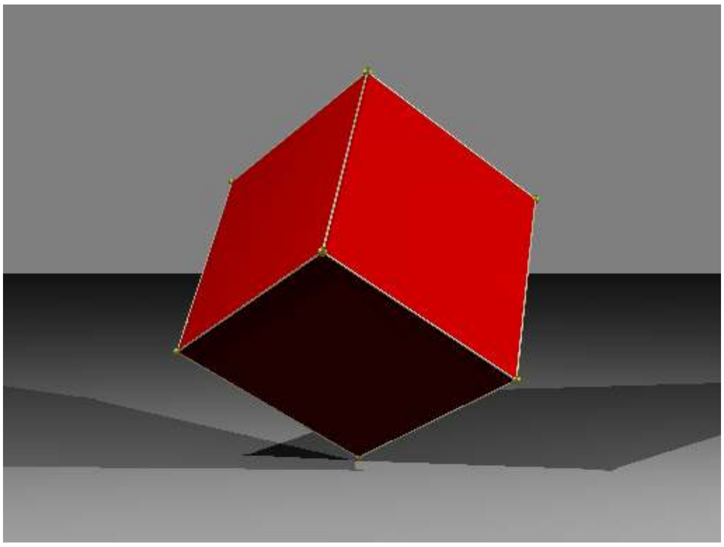
Der auf der Fläche lastende Körper wird auf eine Kante gekippt.

Ein labiler Zustand entsteht, der für den Körper zwei Bewegungsrichtungen zulässt.



Eine das räumliche Umfeld einbeziehende Auffassung könnte den Zustand mit Schwimmen in einer Flüssigkeit assoziieren.

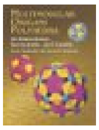
Nun bewegen wir den Körper von der Kantenlage so, dass er auf einer Spitze steht. Seine Lage ist jetzt in jeder Hinsicht instabil, er kann in alle Richtungen umfallen. Da er sich aber dennoch hält, macht er einen schwebenden Eindruck.



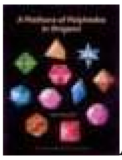
Fassen wir den Würfel mit beiden Händen an den raumdiagonal entgegengesetzten Ecken und drehen ihn, fällt der „Äquator“, die gezackte „Taille“ ins Auge. Diese Linie wird von 6 Würfelkanten gebildet, die in ihrer Regelmäßigkeit den Würfel in Oben und Unten teilen. An einer Ecke stoßen je drei Flächen aneinander; sie bilden einen Oktanten, die räumliche Ecke eines dreidimensionalen Systems. Wir können uns auch vorstellen, dass der Würfel aus zwei solchen Raum-Ecken zusammengesetzt ist.

Literatur:

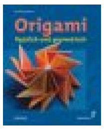
3-D Geometric Origami
Rona Gurkewitz, u. a. Dover Publications (1996)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 6,49**



Multimodular Origami Polyhedra: Archimedeans, Buckyballs and Duality
Rona Gurkewitz, Bennett Arnstein Dover Publications (2003)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 7,49**

**A Plethora of Polyhedra in Origami**
John Montroll, Montroll Dover Publications (2002)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 11,95**

Mathematical Origami
David Mitchell Tarquin Publications (1997)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 8,49**



Origami figürlich und geometrisch
Kunihiko Kasahara Augustus Verlag im Weltbild (2000)
Gebundene Ausgabe vergriffen, antiquarisch etwa **EUR 11,00**

Internet:

http://www.viereck-verlag.de/origami.html (zur Historie)
http://www.papierfalten.de/de/ (homepage von Origami Deutschland)
http://www.mizushobai.freeserve.co.uk/ (homepage von David Mitchell)
http://theory.lcs.mit.edu/~edemaine/ (homepage von Eric Demaine)