Differentialrechnung I

Michael Spielmann

Inhaltsverzeichnis

1 Begriff der Ableitung **2**

2 Beweise einiger Ableitungsregeln **3**
2.1 Quadratfunktion $y = x^2$ 3
2.2 Potenzfunktion $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ 3
2.3 Kehrwertfunktion $y = \frac{1}{g(x)}$ 4
2.4 Wurzelfunktion $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 5
2.5 geschachtelte Funktion $y = f(g(x))$, die Kettenregel 6
2.6 implizite Ableitung 6
2.7 gebrochene Exponenten $y = x^k, k \in \mathbb{Q}$ 7
2.8 Umkehrfunktion 7
2.9 $y = u(x) \cdot v(x)$, die Produktregel 8
2.10 $y = u(x) : v(x)$, die Quotientenregel 8
2.11 $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, Induktion 8

3 Zusammenstellung der Ableitungsregeln **9**

4 der interessante Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ **10**

5 Ableitung der trigonometrischen Funktionen **12**

6 Lösungen der bisher gestellten Aufgaben 2.1 bis 5.10 **14**

7 Exponential- und Logarithmusfunktion **16**

8 Lösungen der Aufgaben 7.1 bis 7.10 **18**

9 Differential **19**

10 Fehlerrechnung **20**

1 Begriff der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion haben wir geometrisch als Tangentensteigung gesehen, allgemein kann man sie als lokale Änderung ansehen.

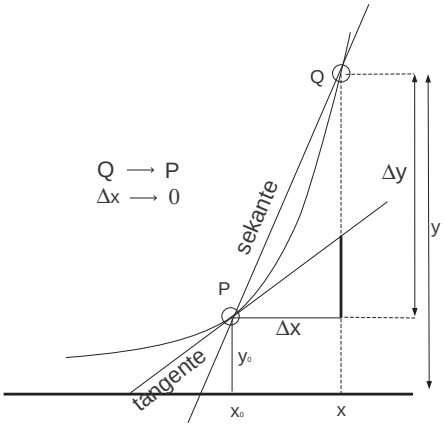

Abbildung 1: Tangente als Grenzlage

Definition 1.1 *Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, dann nennen wir ihn ,,Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0".

Den Quotienten nennen wir ,,Differenzenquotient", manchmal schreiben wir ihn in der Form $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; den Grenzwert nennen wir ,,Differentialquotient" und schreiben oft mit sogenannten Differentialen $\frac{dy}{dx}$, was wir später erklären werden, oder $\frac{d}{dx} f(x)$, oder auch einfach $f'(x_0)$, wenn wir ihn auf eine bestimmte Stelle x_0 beziehen.

Da die Ableitung an beliebiger Stelle berechnet werden kann, können wir die Ableitung einer Funktion wiederum als Funktion auffassen, und schreiben dann oft $f'(x)$ oder auch noch kürzer y'.

Anmerkung 1.1 *Für den Differentialquotienten kennen wir unterschiedliche Schreibweisen:*

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Anmerkung 1.2 *Da Zähler und Nenner des Quotienten beide gegen Null gehen, kann man sie nicht einzeln untersuchen. Man muss den Quotienten also mehr oder weniger raffiniert umformen, damit der Grenzwert ,,leicht" zu bestimmen ist.*

2 Beweise einiger Ableitungsregeln

2.1 Quadratfunktion $y = x^2$

Wir wollen die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^2$ bestimmen.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

Wir sehen, dass wir die Binome kennen sollten.

Alternativ rechnen wir die Aufgabe mit der h-Schreibweise.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Eine etwas andere Technik, hier lösen wir ein Binom auf, oben haben wir es faktorisiert.

2.2 Potenzfunktion $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

Da $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$, kann man auch x^3 leicht ableiten. Man erhält

$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$$

Aufgabe 2.1 *Bestimme auf zwei Arten die Ableitung von $y = x^3$.*

Aufgabe 2.2 *Beweise, dass $x^4 - x_0^4 = (x - x_0)(x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3)$*

Aufgabe 2.3 *Beweise, dass*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i$$

Nach diesen Aufgaben sind wir ziemlich sicher, dass für positive Exponenten n gilt

$$y = f(x) = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

2.3 Kehrwertfunktion $y = \frac{1}{g(x)}$

Gilt eine solche Regel auch für negative Exponenten und sogar für gebrochene? Das wird sofort untersucht.

Wir wollen die Ableitung der Funktion bestimmen.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x_0 - x}{xx_0(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{xx_0} = \frac{-1}{x_0^2} = -x_0^{-2}$$

Offenbar passt die Potenz-Ableitungsregel auch auf diese Funktion. Die Verallgemeinerung werden wir mit einer allgemeineren Regel begründen. x^{-k} ist ja nichts anderes als $\frac{1}{x^k}$. Das heisst, es ist eine Kombination aus Kehrwertbilden und Potenzieren. So gebaute Funktionen nennen wir ,,geschachtelte" Funktionen oder auch ,,verkettete" Funktionen. Offenbar geht es hier um die Frage, wie man den Kehrwert einer Funktion ableitet. Später werden wir allgemein geschachtelte Funktionen ableiten.

$$y = f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

Um die Verkettung deutlich zu machen, können wir schreiben $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $z = g(x)$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
= & \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
= & \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
= & \frac{-1}{g(x_0)g(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\textit{das ist eine Ableitung}} \\
= & \frac{-1}{g(x_0)g(x_0)} \qquad \cdot g'(x_0) \\
= & -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}$$

Auch dies können wir mit der h-Schreibweise durchrechnen.

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)\cdot h} \\
= & \frac{-1}{g(x)g(x+h)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\textit{das ist eine Ableitung}} \\
= & \frac{-1}{g(x)g(x)} \qquad \cdot g'(x) \\
= & -\frac{g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 2.1

$$y = f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Beweis 2.1 *siehe oben*

Die Ableitung sieht der von $\frac{1}{x}$ sehr ähnlich, was eigentlich nicht verwundert. Es gilt ja
$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$; hier kommt nur noch die Ableitung von z als Faktor hinzu.

Jetzt leiten wir $\frac{1}{x^k}$ nach dieser neuen Regel ab.

$$y = x^{-k} = \frac{1}{x^k} \Rightarrow y' = -\frac{k\cdot x^{k-1}}{(x^k)^2} = -k\cdot x^{-k-1}$$

Das entspricht genau der bekannten Potenzregel für die positiven Exponenten.
Was haben wir damit gezeigt? Unter der Voraussetzung, dass die Formel für natürliche Exponenten gilt, haben wir sie mit Hilfe der Kehrwertregel auf negative Exponenten ausgedehnt.

Das machen wir jetzt für gebrochene Exponenten.

2.4 Wurzelfunktion $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Wir wollen die Ableitung der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

Passt das zur Potenzregel? Ja; denn

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

und

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Der Exponent kommt als Faktor nach vorne, der neue Exponent ist um 1 kleiner. Um zu zeigen, dass dies auch für andere gebrochene Exponenten gilt, benötigen wir die „Kettenregel".

2.5 geschachtelte Funktion $y = f(g(x))$, die Kettenregel

Satz 2.2

$$y = f(x) = g(h(x)) \Rightarrow y' = g'(h) \cdot h'(x)$$

Beweis 2.2

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(g(h(x)) - g(h(x_0))) \cdot (h(x) - h(x_0))}{(h(x) - h(x_0)) \cdot (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{(x - x_0)} \\
&= g'(h(x_0)) \qquad\qquad\qquad \cdot h'(x_0)
\end{aligned}$$

Anmerkung 2.1 *Hier haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass mit $x \to x_0$ auch $h(x) \to h(x_0)$ und $g(h(x)) \to g(h(x_0))$ gehen.*

2.6 implizite Ableitung

Jetzt haben wir die Kettenregel bewiesen, benötigen aber noch eine kleine raffinierte Umformung der Funktions-Gleichungen mit gebrochenen Exponenten. Wir schreiben die Gleichung wurzelfrei.

$$f(x) = x^{1/2} \Rightarrow (f(x))^2 = x$$

Wir wollen hier nicht an die Umkehrung einer Funktion denken, sondern an eine Umformung der Gleichung. x bleibt die unabhängige Variable, y hängt weiterhin von x ab.
Die linke Seite ist eine verkettete (geschachtelte) Funktion geworden; die rechte Seite eine einfache Potenz. Wenn zwei Funktionen gleich sind, sind auch ihre Ableitungen gleich. Wir leiten die linke und die rechte Seite getrennt ab.

$$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 1$$

Auflösen nach f' und Ersetzen von f ergibt

$$f' = \frac{1}{2 \cdot f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

was die bekannte Ableitung der Wurzel ist.

Anmerkung 2.2 *Diese Art der Darstellung von Funktionen nennt man ,,implizite Darstellung"; die Ableitung heißt entsprechend ,,implizite Ableitung".*

Anmerkung 2.3 *Wir werden die implizite Ableitung sehr gut bei der Kreisgleichung gebrauchen können.*

2.7 gebrochene Exponenten $y = x^k, k \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
y &= x^{\frac{m}{n}} \text{ mit ganzen Exponenten schreiben} \\
y^n &= x^m \text{ ableiten} \\
\Rightarrow n \cdot y^{n-1} \cdot y' &= mx^{m-1} \\
y' &= \frac{mx^{m-1}}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}\cdot(n-1)}} = \frac{m}{n} \cdot x^{m-1-m+\frac{m}{n}} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}$$

Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten werden also genau so abgeleitet wie diejenigen mit ganzzahligen Exponenten.

Aufgabe 2.4 *Bestimme die Ableitung von $y = x^{1/3}$.*

Aufgabe 2.5 *Bestimme die Ableitung von $y = x^{2/3}$.*

2.8 Umkehrfunktion

Bezeichnet man mit f^* die Umkehrung von f, dann kann man schreiben

$$y = f(x) \;\Rightarrow x = f^*(y) \;\Rightarrow f^*(f(x)) = x$$

Als griffigere Beispiele

$$y = \sqrt{x} \;\Rightarrow x = y^2 \;\Rightarrow \sqrt{x}^{\,2} = x$$

$$y = \arctan x \;\Rightarrow x = \tan y \;\Rightarrow \tan(\arctan x) = x$$

Die letzten Gleichungen stellen wieder eine Verkettung dar, und wir ahnen schon, was geschehen wird. Wir leiten mit der Kettenregel ab.

$$\begin{aligned}
f^*(f(x)) &= x \\
f^*(f(x))' &= 1 \\
f^{*\prime}(f) \cdot f'(x) &= 1 \\
f^{*\prime}(f) &= \frac{1}{f'(x)}
\end{aligned}$$

Die Technik wird an einem Beispiel deutlich.

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 \Rightarrow f^*(y) = \sqrt{y} \\ f^*(f(x)) &= x \\ f^{*\prime}(y) &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Wir werden selten von dieser Regel Gebrauch machen, da wir implizit ableiten können. Es ist aber eine übliche Regel, daher wird sie hier erwähnt.

2.9 $y = u(x) \cdot v(x)$, die Produktregel

Um nun noch die Potenzregel für die positiven Exponenten befriedigend beweisen zu können, benötigen wir die Produktregel.

Satz 2.3

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beweis 2.3

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) \overbrace{-u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x)}^{\textit{ergänzt, um ausklammern zu können}} -u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) \right) + \lim_{x \to x_0} \left(u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0) \end{aligned}$$

2.10 $y = u(x) : v(x)$, die Quotientenregel

Aufgabe 2.6 *Beweise die Quotientenregel* $y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

2.11 $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, Induktion

Und jetzt beweisen wir die Potenzregel mit vollständiger Induktion. Wir machen nur den Induktionsschluß.

Sei $y = x^k \Rightarrow y' = k \cdot x^{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gültig.
Dann ist wegen

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = k \cdot x^k + x^k = (k+1) \cdot x^k$$

die Formel offenbar auch für das nächste k gültig. Das ist der Induktionsschluss.

3 Zusammenstellung der Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}
\text{Faktorregel} \quad y &= c \cdot u(x) \Rightarrow y' = c \cdot u'(x) && (1)\\
\text{Summenregel} \quad y &= u(x) + v(x) \Rightarrow y' = u'(x) + v'(x) && (2)\\
\text{Produktregel} \quad y &= u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) && (3)\\
\text{Quotientenregel} \quad y &= \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} && (4)\\
\text{Kettenregel} \quad y &= u(v(x)) \Rightarrow y' = u'(v) \cdot v'(x) && (5)\\
\text{Umkehrfunktion} \quad y &= f(x), x = f^*(y) \ \Rightarrow f^{*\prime}(y) \cdot f'(x) = 1 && (6)
\end{aligned}$$

4 der interessante Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$

Bisher gelang es uns immer relativ leicht, die Grenzwerte zu bestimmen. Wir konnten kürzen oder eine Polynomdivision ausführen. Bei

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

ist das nicht möglich. Wir suchen einen anderen Weg. Einsetzen von Zahlen liefert etwa folgende Tabelle.

Grad°	x rad	$\sin x$	$\tan x$
0°	0,00000	0,00000	0,00000
1°	0,01745	0,01745	0,01746
2°	0,03491	0,03490	0,03492
3°	0,05236	0,05234	0,05241

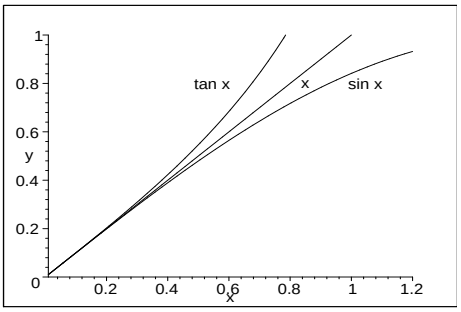

Abbildung 2: Vergleich von $\sin x$, x und $\tan x$

Die Graphik zeigt uns, was die Tabelle angedeutet hat. x, $\sin x$ und $\tan x$ sind bis $x = 0,3$ fast identisch; für größere x ist erkennbar $\sin x < x < \tan x$.

Es wird also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

sein.

Das zeigen wir jetzt.

Für $0 < x < \pi/2$ gilt

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{wir haben durch sin x geteilt}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \text{wir nahmen den Kehrwert}$$

Mit $x \to 0$ geht $\cos x \to 1$. Also ist erwiesen, dass $\frac{sinx}{x}$ immer näher an 1 rückt.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Aber bitte Vorsicht bei der Argumentation!

Die Ungleichung (4) $\sin x < x < \tan x$ ist zumindest im rechten Teil nicht

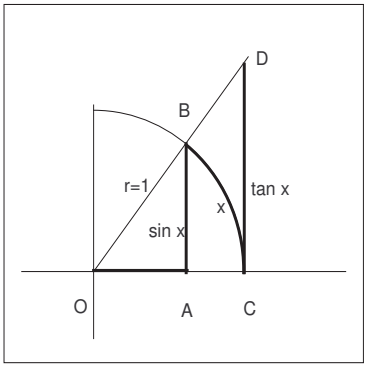

Abbildung 3: Abschätzung von $\frac{\sin x}{x}$

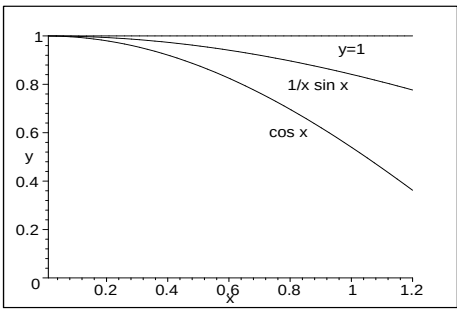

Abbildung 4: Verlauf von $\frac{\sin x}{x}$ zwischen $\cos x$ und 1

ganz trivial. Es ist nicht selbstverständlich, dass $x < \tan x$. Wir können dies jedoch zeigen. Dazu vergleichen wir die eingeschlossenen Flächen, deren Größenverhältnisse augenscheinlich sind.

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 < \frac{1}{2} \cdot \tan x \cdot 1$$

$$\Rightarrow x < \tan x$$

Dabei setzen wir voraus, dass bekanntermaßen die Fläche eines Sektors gleich $\frac{1}{2} \cdot bogen \cdot radius$ ist. So, das hätten wir damit erledigt. Aber eigentlich ja nur für positive x. Wenn $-\pi/2 < x < 0$ ist, sind x und $\sin x$ und $\tan x$ negativ. Alle Ungleichungszeichen in (4) kehren sich um, beim Kehrwertnehmen allerdings ein zweites mal. Für negatives x läuft die Argumentation also auch durch.

Aufgabe 4.1 *Zeige, dass*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Man kann benutzen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Wir stellen fest, dass offenbar die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ den Grenzwert 1 haben kann. Er kann in anderen Fällen auch 0 sein. Wir zeigen, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\cdot(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\\
&= 1\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

5 Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Wenn wir den Graphen der sinus-Funktion betrachten, stellen wir fest, dass der Steigungsverlauf der cosinus-Funktion ähnelt.

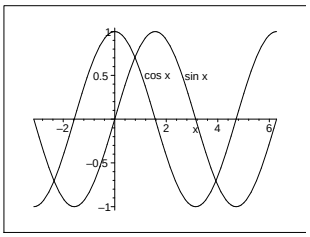

Abbildung 5: Sinus und Cosinus

Wir bestimmen die Ableitung der Sinus-Funktion.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} \quad \text{kürzen können wir nicht}\\
&\quad \text{aus der Formelsammlung entnehmen wir einen Term für } \sin x-\sin x_0\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{2\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}2\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} \quad \text{die 2 ziehen wir in den Nenner}\\
&= \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\\
&= \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \quad \text{wir ersetzen } \frac{x-x_0}{2} \text{ durch } h\\
&= \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x_0
\end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.1

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

Rechnerisch einfacher aber ebenfalls zum Ziel führend ist der Ansatz mit h. Auch den wollen wir durchrechnen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Man kann auch mit einem anderen Additionstheorem arbeiten.
$\sin(x+h) = \sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cdot\cos h+\cos x\cdot\sin h-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cdot(\cos h-1)+\cos x\cdot\sin h}{h} \\ &= \sin x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}}_{=0}+\cos x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Ableitungen der trigonometrischen Umkehrfunktionen bestimmen.

$$y = \arcsin x \Rightarrow \sin(\arcsin x) = x \Rightarrow \cos(y)\cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 5.1 *Zeige*

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Benutze die Formeln $\sin(x+\pi/2) = \cos x$ *und* $\cos(x+\pi/2) = -\sin x$.

Aufgabe 5.2 *Zeige*

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Benutze den trigonometrischen Pythagoras.

Aufgabe 5.3 *Leite aus der Gleichung* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *durch implizites Differenzieren die Ableitung von* $\cos x$ *her.*

Aufgabe 5.4 *Zeige*

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

Aufgabe 5.5 *Zeige*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Aufgabe 5.6 *Zeige*

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 5.7 *Man kennt* $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$. *Berechne*

$$(\sin 2x)' \quad \textit{und} \quad (2 \sin x \cos x)'$$

und leite daraus eine Formel her für $\cos 2x$.

Aufgabe 5.8 *Bestimme Nullstellen von y, erste und zweite Ableitung, Zeichnung von*
a) $x \cdot \sin x$ *b)* $x^2 \cdot \cos x$ *c)* $\frac{1}{\sin x}$ *d)* $\frac{\cos x}{x}$ *e)* $\sin(\frac{1}{x})$ *f)* $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

Aufgabe 5.9 *Vergleiche die Kurven* $f(x) = \sin x$ *und* $g(x) = x - \frac{1}{6}x^3$.

Aufgabe 5.10 *Beweise, dass die Funktion* $y = a \cdot \sin(\sqrt{c}\, x) + b \cdot \cos(\sqrt{c}\, x)$ *die Gleichung* $y'' = -cy$ *erfüllt.*

6 Lösungen der bisher gestellten Aufgaben 2.1 bis 5.10

Lösung 2.1:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) = 3x_0^2$$

oder mit h geschrieben

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Lösung 2.2: ausmultiplizieren

$$(x - x_0)(x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3) = x^4 - x^3 x_0 + x^3 x_0 - x^2 x_0^2 + x^2 x_0^2 - x x_0^3 + x x_0^3 - x_0^4 = x^4 - x_0^4$$

Lösung 2.3:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i = (a - b)(a^n + a^{n-1} b + \cdots + a b^{n-1} + b^n)$$

ausmultiplizieren, innere Glieder heben sich alle weg:

$$= a^{n+1} - a^n b + a^n b - a^{n-1} b^2 + \cdots + a^2 b^{n-1} - a b^n + a b^n - b^{n+1}$$

Lösung 2.4:

$$y = x^{1/3} \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow 3y^2 y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

Lösung 2.5:

$$y = x^{2/3} \Rightarrow y^3 = x^2 \Rightarrow 3y^2y' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2x}{3x^{4/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

Lösung 2.6: Wir schreiben u statt $u(x)$. Dann wird $y = \frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$
Wir wenden Produktregel und Kehrwertregel an.

$$y' = u' \cdot v^{-1} + u \cdot (-1)v^{-2} \cdot v' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Lösung 4.1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Lösung 5.1:

$$(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

Lösung 5.2: $y = \cos x \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot 2 \cdot \sin x \cos x = -\sin x$
Lösung 5.3:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \;\Rightarrow\; 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos x \cdot (\cos x)'$$

$$= 0 \;\Rightarrow\; 2\cos x \cdot (\cos x)' = -2\sin x \cdot \cos x \Rightarrow (\cos x)' = -\sin x$$

Lösung 5.4:

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Lösung 5.5:

$$y = \arctan x \Rightarrow \tan(\arctan x) = x \Rightarrow (1 + \tan^2(y)) \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Lösung 5.6: $\cdots = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
Lösung 5.7:

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x; \qquad (2\sin x \cos x)' = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Lösung 5.9: f und g sind nahe 0 fast identisch; $f(0) = g(0); \ldots f'''(0) = g'''(0)$
Lösung 5.10: $y' = a\sqrt{c} \cdot \cos(\sqrt{c}\, x) - b\sqrt{c} \cdot \sin(\sqrt{c}\, x)$; $y'' = -a \cdot c \cdot \sin(\sqrt{c}\, x) - b \cdot c \cdot \cos(\sqrt{c}\, x) = -cy$

7 Exponential- und Logarithmusfunktion

Bisher haben alle Funktionen ihr Aussehen beim Ableiten verändert. Gibt es eine Funktion, die gleich ihrer Ableitung ist? Beim Ableiten einer Potenz verringert sich der Exponent um 1; die Funktion bleibt also nicht gleich.

Jede Potenz x^k kann Ableitung sein außer x^{-1}; sie kam nie als Ableitung vor.

Diesen beiden Problemen gehen wir jetzt nach.

Funktion und Ableitung sollen gleich sein: wir lösen die Gleichung $y = y'$. Der triviale Fall ist $y = 0$. Wir suchen eine weitere Lösung. Das ist nicht so ganz einfach; zunächst versuchen wir eine bildliche Darstellung.

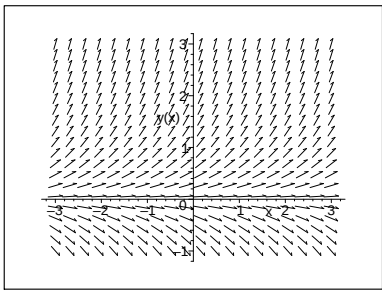

Abbildung 6: Richtungsfeld von $y = y'$

Was bedeutet $y = y'$? Auf der Höhe y ist die Steigung y. Das sogenannte Richtungsfeld ist so entstanden, dass wir Tangentenabschnitte mit Steigung 2 auf der Höhe $y = 2$ gezeichnet haben, und entsprechende andere Werte. Wir erkennen angenähert den Verlauf einer Exponentialfunktion, vermuten als Lösung also $y = a^x$ oder $y = -a^x$ oder auch $y = 0$, was aber der triviale Fall ist. Wir wissen, dass verschiedene Exponentialfunktionen auch unterschiedlich schnell anwachsen. Welche von den Funktionen $y = a^x$ erfüllt unsere Voraussetzung?

$$\frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass die Ableitung von a^x gleich a^x ist, wenn es uns gelingt, a so zu bestimmen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

Wir wollen es zumindest näherungsweise versuchen.

$$\frac{a^h - 1}{h} \approx 1 \Rightarrow a \approx (1 + h)^{1/h}$$

h	$(1+h)^{1/h}$
0,1	2.593742460
0,01	2.704813829
0,001	2.716923932
0,0001	2.718145927
0,00001	2.718268237

Mit kleinem h finden wir $a \approx 2,718$, was man mit besseren Methoden natürlich genauer bestimmen kann. Auf einen exakten Konvergenznachweis verzichten wir hier. Die exakte Basis a nennt man Eulersche-Zahl; sie wird mit e beschrieben.

Die Lösung der Gleichung $y = y'$ ist also $y = e^x$, nach Ableitungsregeln auch $y = -e^x$ und $y = 0$.

Die Umkehrung der Funktion $y = e^x$ bezeichnet man als natürlichen Logarithmus, logarithmus naturalis, $y = \ln x$. Wir bestimmen die Ableitung implizit.

$$y = \ln x \Rightarrow e^y = x \Rightarrow e^y \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

So haben wir jetzt die Funktion gefunden, die gleich ihrer Ableitung ist. Und wir haben die Funktion gefunden, deren Ableitung x^{-1} ist.

Mit Hilfe der logarithmischen Rechenregeln können wir jede Potenz a^x als Potenz mit Basis e schreiben.

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$$

Die Ableitung mit Kettenregel ergibt

$$\frac{d}{dx} a^x = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

Aufgabe 7.1 *Bestimme y' und y'':*
a) $f(x) = e^{2x}$ *b)* $g(x) = e^{x^2}$ *c)* $h(x) = e^x + e^{-x}$

Aufgabe 7.2 *Bestimme y' und y'':*
a) $f(x) = 3^x$ *b)* $g(x) = 2^{x^2}$ *c)* $h(x) = 5^{-x}$

Aufgabe 7.3 *Bestimme y' und y'':*
a) $f(x) = \ln 2x$ *b)* $g(x) = \ln x^2$ *c)* $h(x) = \ln \frac{1}{x}$

Aufgabe 7.4 *Diskutiere a)* $f(x) = xe^x$ *b)* $g(x) = x^2 e^x$ *c)* $h(x) = \frac{1}{x} e^x$

Aufgabe 7.5 *Diskutiere*
a) $f(x) = x \ln x$ *b)* $g(x) = x^2 \ln x$ *c)* $h(x) = \frac{1}{x} \ln x$

Aufgabe 7.6 *Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven von*

$$y = \ln(x+3) \text{ und } y = \ln(7-x)$$

Aufgabe 7.7 *Mache dir eine Vorstellung von den Grenzwerten*

$$\lim_{x \to \infty} x^3 \cdot e^{-x} \text{ und } \lim_{x \to \infty} x^8 \cdot e^{-x}$$

Aufgabe 7.8 *Mache dir eine Vorstellung von den Grenzwerten*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^3} \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 7.9 *Von den beiden vorhergehenden Aufgaben kann man (vorsichtig) auf die unterschiedlichen Wachstumsgeschwindigkeiten von* $\ln x$, x^n *und* e^x *schließen.*

Aufgabe 7.10 $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + \sqrt{1+x^2}$, *$y'$ bestimmen.*

8 Lösungen der Aufgaben 7.1 bis 7.10

Lösung 7.1: a) $f'(x) = 2e^{2x}$; $f''(x) = 4e^{2x}$ b) $g'(x) = 2xe^{x^2}$; $g''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$ c) $h'(x) = e^x - e^{-x}$; $h''(x) = e^x + e^{-x}$

Lösung 7.2: a) $f' = \ln 3 \cdot 3^x$; $f'' = (\ln 3)^2 \cdot 3^x$ b) $g' = 2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2}$; $g'' = (2\ln 2 + 4x^2(\ln 2)^2) \cdot 2^{x^2}$ c) $h' = -\ln 5 \cdot 5^{-x}$; $h'' = (\ln 5)^2 \cdot 5^{-x}$

Lösung 7.3: a) $f' = \frac{1}{x}$; $f'' = -\frac{1}{x^2}$ b) $g' = \frac{2}{x}$; $g'' = -\frac{2}{x^2}$ c) $h' = -\frac{1}{x}$; $h'' = \frac{1}{x^2}$

Lösung 7.4:
a) $f = xe^x$; $x_0 = 0$; $f' = (x+1)e^x$; $x_0' = -1$; VZW -+ Mini; $f'' = (x+2)e^x$; $x_0'' = -2$; VZW WP
b) $g = x^2e^x$; $x_0 = 0$; $g' = (x^2+2x)e^x$; $x_{01}' = -2$ $x_{02}' = 0$; VZW +- Max, -+ Mini; $g'' = (x^2+4x+2)e^x$; $x_{01}'' = -3,41$ $x_{02} = -0,58$ VZW WP
c) $h = \frac{1}{x}e^x$; keine NS; $h' = (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})e^x$; $x_{01}' = 1$; VZW -+ Mini; $h'' = (\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3})e^x$; keine NS

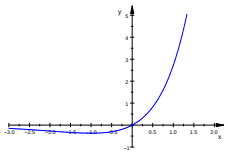

Abbildung 7: xe^x

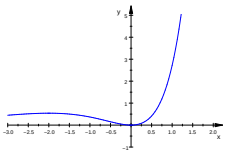

Abbildung 8: x^2e^x

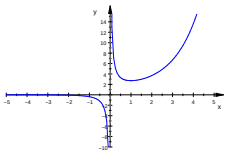

Abbildung 9: $\frac{1}{x}e^x$

Lösung 7.5: a) $f = x\ln x$ $x > 0$; $x_0 = 1$; $f' = 1 + \ln x$; $x_0' = e^{-1} = 0,3$ VZW -+ Mini; $f'' = \frac{1}{x}$ keine NS b) $g = x^2 \ln x$; $x_0 = 1$; $g' = x + 2x\ln x$; $x_0' = e^{-0,5} = 0,6$ VZW -+ Mini; $g'' = 2\ln x + 3$; $x_0 = e^{-1,5} \approx 0,2$ VZW WP
c) $h = \frac{1}{x}\ln x$; $x_0 = 1$; $h' = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $x_0' = e$ VZW +- Max; $h'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$; $x_0'' = e^{1,5}$ VZW WP

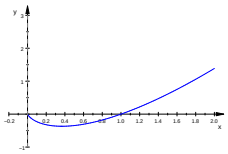

Abbildung 10: $x\ln x$

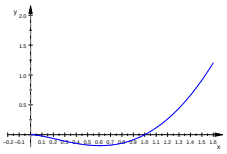

Abbildung 11: $x^2 \ln x$

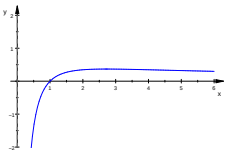

Abbildung 12: $\frac{1}{x}\ln x$

Lösung 7.6: Schnitt $x + 3 = 7 - x; x = 2$; Steigung $\frac{1}{2+3} = 1/5$ und $-\frac{1}{7-2} = -1/5$;
$\arctan 0,2 \approx 11,3°$ Schnittwinkel also $22,6°$

Lösung 7.7:
Wir setzen (ganz naiv) große x-Werte ein. z.B. $x = 1000$. $1000^3 \cdot e^{-1000} \approx 5,07 \cdot 10^{-426}$ ist klein. $1000^8 \cdot e^{-1000} \approx 5,07 \cdot 10^{-411}$ ist um den Faktor 10^{15} größer, aber immer noch klein. Der Grenzwert scheint allemal 0 zu sein. Obwohl x^3 und x^8 stark wachsen, ist der Grenzwert 0.

Lösung 7.8:
Auch hier wieder $x = 1000$ einsetzen. $\ln 1000/1000^3 \approx 6,9 \cdot 10^{-9}$; $\ln 1000/\sqrt{1000} \approx$

$0,218$; $\ln 10^6/\sqrt{10^6} \approx 0,0138$ wird langsam klein. x^3 und $\sqrt{x}$ wachsen so stark, dass der Grenzwert 0 ist.

Lösung 7.9: $\ln x$ wächst langsamer als jede Potenz mit positivem Exponenten; und diese wird immer von e^x übertroffen. (Das beweisen wir später mit der Regel von DE L´HOSPITAL.)

Lösung 7.10: $y' = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

9 Differential

Die Ableitung haben wir ,,Differentialquotient" genannt, obwohl der Grenzwert des Quotienten nicht als Quotient geschrieben wurde. Wir definieren Differentiale, damit der Name ,,Differentialquotient" seine Berechtigung hat.

Historisch gesehen lief es andersherum. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) hat sich mit kleinen Größen beschäftigt, und mit deren gegenseitiger Abhängigkeit. Er erfand die Differentialrechnung lange bevor man den Grenzwertbegriff genauer untersuchte.

Was ist nun ein Differential?

Definition 9.1 *f sei eine von x abhängige Funktion.*

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

df nennen wir ,,Differential" von f.

Anmerkung 9.1 *Da $dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x$, schreibt man $df = f' \cdot dx$*

Anmerkung 9.2 *Jetzt wird der Ausdruck Differentialquotient verständlicher, da $f' = \frac{df}{dx}$.*

Ein Differential ist eine lineare Funktion, deren konstante Steigung $f'(x_0)$ ist.

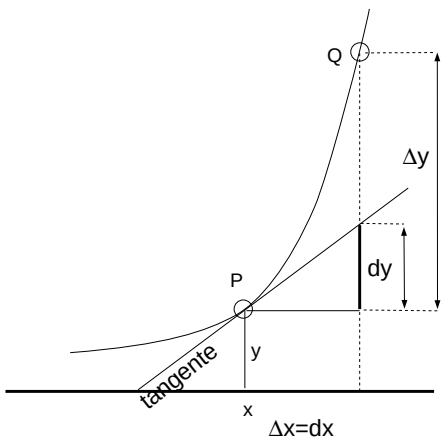

Abbildung 13: Differential

Man findet verschiedene Schreibweisen für den Differentialquotienten und unterschiedliche Sprechweisen.

$$\frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx}; \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

gesprochen „dy durch dx" oder „dy nach dx" oder „df nach dx" oder „d nach dx von f".

Anmerkung 9.3 *Wenn dx klein ist, ist* $dy \approx \Delta y$,
und, was wir aber schon länger wissen, $y' = \frac{dy}{dx} \approx \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Mit Hilfe der Differentialschreibweise gelingt uns eine elegantere Formulierung der Kettenregel für $f(x) = g(h(x))$.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg \cdot dh}{dh \cdot dx} = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$$

10 Fehlerrechnung

Bei jeder Messung macht man Fehler. Die Ursache des Fehlers interessiert uns hier nicht so sehr; er kann in der Ungenauigkeit des Messinstruments begründet sein, oder auch in der groben Handhabung des Instruments. Nehmen wir einmal an, wir messen eine Quadratfläche. Eigentlich ist die Formulierung schon falsch, denn wir messen keine Fläche, wir messen eine Seite und berechnen die zugehörige Fläche. Wie genau können wir die Fläche angeben?

Die Frage kann man anders formulieren: Wie groß ist der Fehler in der Fläche? Um wieviel wächst die Fläche, wenn die Länge um 5 mm wächst?

Das klingt nach Zuwachs, Wachstum, Steigung, Ableitung. Wir lösen die Aufgabe mit Ableitungen. Da Fehler zumeist relativ klein sind, kann man sie mit Differentialen in Verbindung bringen.

Beispiel 10.1 *Die Quadratseite wird gemessen mit 72 cm, wobei die Genauigkeit des Maßbandes bei 0,5 cm liegt.*

$$\begin{aligned} &A(x) = x^2; \quad \frac{dA}{dx} = 2x; \quad dA = 2x \cdot dx \\ &x = 72\ cm; \quad dx = 0,5\ cm \\ &dA = 2 \cdot 72 \cdot 0,5\ cm^2 = 72\ cm^2 \end{aligned}$$

Bei dieser Flächengröße beträgt der Fehler in der Fläche 72 cm^2*, wenn der Fehler in der Länge* $0,5\ cm^2$ *beträgt. Der relative Messfehler beträgt* $\frac{dx}{x} = \frac{0,5}{72} \approx 0,7\%$*, der relative Flächenfehler beträgt* $\frac{dA}{A} = \frac{72}{72^2} \approx 1,4\%$.

Anmerkung 10.1 *Es handelt sich hier nicht um eine Fehlerabschätzung im Sinne eines maximalen Fehlers. Mit Differentialen können wir einen Fehler angenähert bestimmen; der tatsächliche Fehler kann größer oder kleiner sein.*

Beispiel 10.2 *Bei einem physikalischen Messgerät wird der Spiegelausschlag* α *durch Ablesen von* x *an einer linearen Skala bestimmt.*

Gegeben sind die Werte $s = 2m$; $x = 250mm$; $dx = 1mm$
Es gilt

$$\alpha = \alpha(x)$$

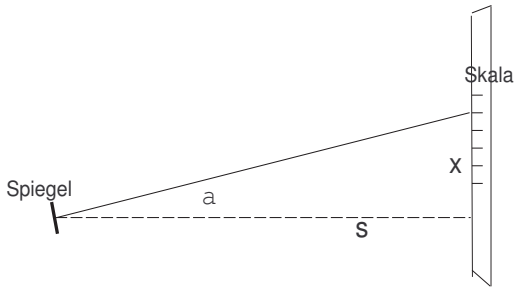

Abbildung 14: Spiegelablesung

$\tan\alpha = \frac{x}{s}$ *leiten wir implizit ab.*

$$(1+\tan^2\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{s}$$

$$(1+\frac{x^2}{s^2})\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{s}$$

$$d\alpha = \frac{sdx}{s^2+x^2}$$

Oder wir nutzen die Ableitung von $\alpha = \arctan\frac{x}{s}$.

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1+(\frac{x}{s})^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$d\alpha = \frac{sdx}{s^2+x^2}$$

Wir berechnen $\alpha = \arctan\frac{250}{2000} = 7,125°$ *und* $\Delta\alpha = \frac{2000\cdot 1}{4062500} = 0,000492 \approx 0,0282° = 1,692'$