Komplexe Zahlen

Michael Spielmann

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Definitionen **1**

2 Polarform **4**

3 Eulerform **4**

4 komplexe Zahlen als Matrizen **5**

5 Matrix und Inverse **6**

6 Lösungen **7**

1 Grundlegende Definitionen

Beim Lösen quadratischer Gleichungen war der Radikand bisweilen kleiner als Null; dies war ein Problem, da Quadrate reeller Zahlen nie kleiner als Null sein können. Wenn man sich darauf einläßt, dass es doch solche Quadrate gibt, muss man den Zahlbereich erweitern. Dies führt zum Begriff der imaginären Zahlen beziehungsweise der komplexen Zahlen.

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1}$$

Wir akzeptieren $\sqrt{-9}$ als Zahl, nennen sie imaginär, die Linear-Kombination mit reellen Zahlen nennen wir komplex, und der Einfachheit halber schreiben wir die imaginären Zahlen als Produkt einer reellen Zahl mit der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$, die wir i nennen.

Definition 1.1 *$i = \sqrt{-1}$ ist die **imaginäre Einheit**.*
*Einen Term der Form $a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ nennen wir **komplexe Zahl**.*

Die Erweiterung des Zahlenbereiches der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat den Vorteil, dass jetzt jede quadratische Gleichung lösbar ist.

Anmerkung 1.1 *Wir schreiben manchmal auch $a+bi$, wenn es besser zu lesen ist; zum Beispiel $4 + 3i$, aber $4 + i\sqrt{3}$.*

Um mit den neuen Zahlen rechnen zu können, teilen wir sie in den sogenannten Realteil und Imaginärteil, verbinden die beiden mit einem Pluszeichen und verlangen, dass die üblichen Rechenregeln erhalten bleiben.

Wenn also zwei komplexe Zahlen $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 2 + 2i$ gegeben sind, dann gilt bei komponentenweiser Addition und unter Beachtung von $i^2 = -1$

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 3 + i + 2 + 2i = 5 + 3i \\
z_1 - z_2 &= 3 + i - (2 + 2i) = 1 - i \\
z_1 \cdot z_2 &= (3 + i) \cdot (2 + 2i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2i + 2 \cdot i + 2 \cdot i^2 = 4 + 8i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + i}{2 + 2i} = \frac{(3 + i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{8 - 4i}{4 + 4} = 1 - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Die Grundrechenarten sind also problemlos möglich.

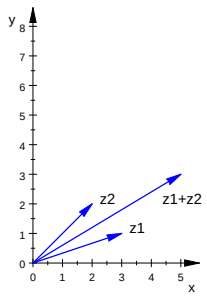

Abbildung 1: Summe

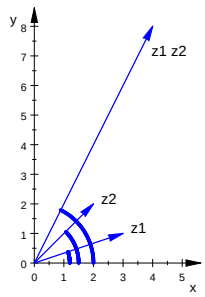

Abbildung 2: Produkt

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{1}$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{2}$$

Die graphische Veranschaulichung im Koordinatensystem zeigt eine formale Übereinstimmung mit der Vektoraddition. Das Produkt erweist sich als Drehstreckung. Dies werden wir später noch geneuer begründen können, wenn wir die Polarform oder die Eulerform studiert haben.

Komplexe Zahlen kann man nicht wie reelle Zahlen hinsichtlich ihrer Größe direkt vergleichen. Aber man kann mit Pythagoras eine **Norm** festlegen; das ist geometrisch gesehen die Länge des Pfeils.

$$z = a + ib; \quad \text{Norm von z ist} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Manchmal ist es praktisch, auch den Winkel ϕ des Pfeils zur reellen Achse anzugeben; man nennt ihn **Argument** der Zahl z. Es gilt $\phi = \arctan \frac{b}{a}$.

Es hat sich als praktisch erwiesen, die Zahl $\bar{z} = a - ib$ als **konjugiert komplexe** zu $z = a + ib$ zu bezeichnen. Zum Beispiel ist dann $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Da man multiplizieren kann, kann man auch potenzieren.

Beispiel 1.1 *Bestimme* $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i)^3$.
Wir nutzen die Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *und erhalten*

$$-\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8}\sqrt{3}i + 3\cdot\frac{1}{8}\cdot 3 - 3\cdot\frac{1}{8}\sqrt{3}i = 1$$

Bestimmt kann man auch radizieren.

Beispiel 1.2 *Bestimme* $\sqrt{8+6i}$
Wir wählen den Ansatz $(x+iy)^2 = 8+6i$ *mit reellen* x *und* y *und bestimmen Realteil und Imaginärteil passend.*

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2xyi &= 8+6i \text{ also} \\ x^2 - y^2 &= 8 \\ 2xy &= 6 \end{aligned}$$

$y = \frac{3}{x}$ *einsetzen ergibt* $x^2 - \frac{9}{x^2} = 8$. *Wir lösen eine biquadratische Gleichung.*

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 - 9 &= 0 \\ x_{1,2}^2 &= 4 \pm \sqrt{25} \\ x_1^2 &= 4+5 = 9 \Rightarrow x_1 = 3; \quad x_2 = -3 \Rightarrow y_1 = 1; \quad y_2 = -1 \\ x_2^2 &= 4-5 = -1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm i \notin \mathbb{R} \\ \sqrt{8+6i} &= 3+i \\ \vee\sqrt{8+6i} &= -3-i \end{aligned}$$

Aufgabe 1.1 *Überprüfe die oben gemachte Aussage, das komplexe Produkt stelle eine Drehstreckung dar, am Beispiel* $z_1 \cdot z_2 = (3+i)\cdot(2+2i) = 4+8i$

Aufgabe 1.2 *Löse die Gleichung* $x^2 - 12x + 52 = 0$.

Aufgabe 1.3 *Stelle in der Form* $a+ib$ *dar: a)* $\frac{2-3i}{3+4i}$, *b)* $i - \frac{1}{i}$, *c)* $\frac{2+i}{i}$

Aufgabe 1.4 *Bestimme* $\sqrt{2i}$ *b) Bestimme* $\sqrt{3-4i}$

Aufgabe 1.5 *Oben wurde gezeigt* $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \Rightarrow z_1^3 = 1$; *das bedeutet aber, dass* $\sqrt[3]{1} = z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. *Berechne* $z_2 = (z_1)^2$, $z_3 = (z_2)^3$. *Berechne jeweils Norm und Argument. Wir haben es hier mit sogenannten komplexen Einheitswurzeln zu tun.*

Aufgabe 1.6 *Zeige* $(-\frac{1}{2}\frac{1}{2}i\sqrt{3})^3 = 1$.

Aufgabe 1.7 *Zeige a)* $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, *b)* $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

2 Polarform

Die Polarform der komplexen Zahl benutzt Norm und Argument der Zahl z, und beschreibt z trigonometrisch. $z = a + ib$, $a = r \cdot \cos\phi$ mit $r = |z|$, $b = r \cdot \sin\phi$

$$z = a + ib = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi) \tag{3}$$

Wenn wir die Additionstheoreme der Trigonometrie beherrschen, können wir nachweisen, dass das Produkt durch die Summe der Argumente (Drehwinkel) beschrieben wird.

$$z_1 = a + ib = r_1 \cdot (\cos\phi_1 + i \cdot \sin\phi_1),\ z_2 = c + id = r_2 \cdot (\cos\phi_2 + i \cdot \sin\phi_2)$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot ((cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2) + i \cdot (\sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2))$$

und wir können mit den Additionstheoremen der Trigonometrie erkennen, dass

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (cos(\phi_1 + \phi_2) + i \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2)) \tag{4}$$

Setzen wir zwei Zahlen mit Norm 1 voraus, was nur die Schreibarbeit erleichtert, dann sehen wir zum Beispiel

$$(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)^2 = \cos^2\phi - \sin^2\phi + 2i \cdot \sin\phi\cos\phi = \cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi$$

Komponentenvergleich liefert $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$ und $\sin 2\phi = 2 \cdot \sin\phi\cos\phi$. Darüberhinaus ist die Formel von Moivre leicht zu sehen:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) \tag{5}$$

Aufgabe 2.1 *Stelle die Zahlen in Polarform dar:*
a) 1, *b)* $1 - i$, *c)* $3 + i\sqrt{3}$, *d)* $0.6 - 0.8i$

Aufgabe 2.2 *Stelle in Normalform* $a + ib$ *dar:*
a) $\sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$, *b)* $3 \cdot (\cos 70° + i \sin 70°)$

Aufgabe 2.3 *Leite eine Formel her für* $\cos 3\phi$ *und* $\sin 3\phi$.

Aufgabe 2.4 *Bestimme* $\sqrt{8 + 6i}$ *mit der Polarform.*

3 Eulerform

Eine weitere interessante Darstellung hat Euler gefunden.
Wir fassen $z = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ als Funktion von ϕ auf und bestimmen die Ableitung. Dann sehen wir

$$\frac{dz}{d\phi} = r \cdot (-\sin\phi + i \cdot \cos\phi) = r \cdot i \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi) = i \cdot z$$

Eine solche Funktion kennen wir: es ist die Exponentialfunktion. Wegen der inneren Ableitung erhalten wir

$$z = a \cdot e^{i\phi}$$

und wegen

$$\phi = 0 \Rightarrow z = a \quad \wedge \quad z = r \Rightarrow a = r$$

$$z \quad = \quad r \cdot e^{i\phi} \tag{6}$$

In dieser Form kommt wiederum besonders schön zum Ausdruck, dass beim Multiplizieren die Argumente addiert werden, was an den Potenzrechenregeln liegt.

Aufgabe 3.1 *Stelle die Zahlen $z_1 = 3 - 4i$ und $z_2 = 0.5 + 8i$ in Eulerform dar.*

Aufgabe 3.2 *Stelle die Zahlen $z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_4 = e^{i\pi}$ in allgemeiner Form dar.*

4 komplexe Zahlen als Matrizen

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Wenn wir komplexe Zahlen als Vektoren auffassen, die aus Realteil und Imaginärteil bestehen, erhalten wir hier ein neuartiges Vektorprodukt.

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

Wir können aber auch die komplexen Zahlen mit einer Matrix identifizieren. Das sehen wir uns am Beispiel an.
Die Einheitsmatrix entspricht der reellen Zahl 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} 1$$

Die negative Einheitsmatrix entspricht der reellen Zahl -1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{=} -1$$

Wenn das Produkt zweier gleicher Zahlen -1 ergibt, dann entsprechen diese Zahlen dem imaginären i.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} i$$

Konsequent weitergedacht finden wir, dass der komplexen Zahl $z_1 = a + ib$ eine Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ entspricht. Wir schreiben auch $z_2 = c + id$ als Matrix.

Das Produkt zweier komplexer Zahlen fassen wir als ein Matrixprodukt auf in folgendem Sinne:

$$\begin{aligned}(a+ib)\ \cdot\ (c+id) &= (ac-bd)+i(bc+ad)\\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac-bd & -bc-ad \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl können wir also als Matrix auffassen. Da wir mit Matrizen ,,etwas" anders rechnen als mit Zahlen, schreiben wir nicht ,,=" .

$$a + i \cdot b \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{7}$$

Die Determinante der Matrix ist a^2+b^2, was genau dem Quadrat der Norm von $a+ib$ entspricht.

Wenn nun also die gerade definierten Matrizen umkehrbar eindeutig den komplexen Zahlen entsprechen, dann können wir sagen, dass die Menge dieser Matrizen dieselbe mathematische Struktur hinsichtlich der Multiplikation aufweist wie die komplexen Zahlen.

Da ein komplexer Faktor eine Drehung bewirkt, sind die komplexen Zahlen mit den **Drehmatrizen** verwandt. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{8}$$

beschreibt eine Drehstreckung mit Faktor r und Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinne, also entgegen dem Uhrzeigersinn. Und mit

$$D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

werden wir künftig eine reine Drehung beschreiben können.

Aufgabe 4.1 *Schreibe die Zahlen $z_1 = 5-3i$ und $z_2 = -2+i$ als Matrizen Z_1 und Z_2, bestimme Produkt und Quotient und vergleiche mit dem auf ,,normalem" Weg erhaltenen Ergebnis.*

Aufgabe 4.2 *Schreibe a) die rein imaginäre Zahl $3i$ und b) die rein reelle Zahl 5 als Matrix. Wie kann man abbildungsgeometrisch die rein imaginäre Zahl und die rein reelle Zahl deuten?*

5 Matrix und Inverse

Durch komplexe Zahlen können wir dividieren; das sollte dann mit den entsprechenden Matrizen auch möglich sein. Das ist es auch, denn die Determinante einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist ungleich Null, falls $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ ist, und das ist der Fall, wenn die komplexe Zahl selbst ungleich Null ist.

6 Lösungen

Aufg. 1.1: $\phi_1 = \arctan\frac{1}{3} = 18.43°$, $|z_1| = \sqrt{10}$, $\phi_2 = 45°$, $|z_1| = \sqrt{8}$,
$\phi_3 = \arctan 2 = 63.43°$, $|z_3| = \sqrt{80}$, stimmt.
Aufg. 1.2: $x_1 = 6 + 4i \quad x_2 = 6 - 4i$
Aufg. 1.3: a)$-\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$, b) $2i$, c) $1 - 2i$
Aufg. 1.4: a) $1 + i, -(1 + i)$ b) $2 - i, -(2 - i)$
Aufg. 1.5: $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$; $arg(z_1) = 120°, arg(z_2) = 240°, norm = 1$
Aufg. 1.6: einfach ausrechnen

Aufg. 1.7: a) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{(a + c + ib + id)} = a+c-ib-id = a-ib+c-id = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ b) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{((ac - bd) + i(ad + bc))} = (ac - bd) - i(ad + bc) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Aufg. 2.1: a) $1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, b) $\sqrt{2} \cdot (\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4})$,
c) $\sqrt{12} \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6})$, d) $\cos 306.87° + i \sin 306.87°$

Aufg. 2.2: a) $1 + i$, b) $1.026 + 2.819i$

Aufg. 2.3: $(\cos\phi+i\cdot\sin\phi)^3 = \cos^3\phi+3i\cos^2\phi\sin\phi-3\cos\phi\sin^2\phi-i\sin^3\phi = \cos 3\phi + i \cdot \sin 3\phi$

Aufg. 2.4: Winkel bestimmen, halbieren, Norm bestimmen, radizieren, Ergebnis ist wegen ungenauer Winkel $\approx 3 + i$

Aufg. 3.1: $z_1 \approx e^{-0.9273i}$, $z_2 \approx \frac{1}{2}\sqrt{257}e^{0.3006i}$

Aufg. 3.2: $z_3 = 2 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_4 = -1$

Aufg. 4.1: $Z_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $Z_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 11 & -7 \end{pmatrix} \triangleq -7+11i$; $z_1 \cdot z_2 = (5-3i)(-2+i) = -10+3+6i+5i = -7+11i$
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$
$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 & -1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \triangleq -\frac{13}{5} + \frac{1}{5}i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-3i}{-2+i} = \frac{(5-3i)(-2-i)}{4+1} = \frac{1}{5}(-13 + i)$

Aufg. 4.2: a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$Die rein imaginäre Zahl $3i$ stellt eine Drehung um 90° mit Streckung um Faktor 3 dar. Die rein reelle Zahl 5 stellt eine Streckung dar.