Gitterpunkte und Gitterstrecken

als Vorbereitung der direkten Proportionalität

M. Spielmann

Ich möchte eine Aufgabensequenz vorstellen, anhand derer die Schüler relativ selbstständig wesentliche Erkenntnisse der Proportionalität und der Teilbarkeitslehre gewinnen können. Ja sogar Grundlagen der analytischen Geometrie der Ebene sind vermittelbar, wenn die Schüler die Möglichkeit erhalten, in verschiedenen gestuften Koordinatensystemen zu arbeiten. Wenn Schüler der 5. Klasse sich mit dieser Thematik beschäftigen, wird man vielleicht besser auf die Begriffe der Proportionalität verzichten, da die Bruchrechnung nicht bereitsteht. Sind die Schüler schon in der 6. Klasse, so kann sehr weitreichend angeschlossen werden, eventuell wird man sogar den Begriffsapparat der Linearen Funktionen anbieten können.

1. Aufgabe: Gegeben sind im Koordinatensystem die Punkte $O(0|0)$ und $A(6|2)$, $B(3|9)$, $C(7|5)$. Verbinde die Punkte A , B , C mit dem Punkt $O(0|0)$.

2. Aufgabe: Welche der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ enthalten weitere Gitterpunkte?

Definition: Gitterpunkte, die nicht Endpunkte einer Strecke sind, nennen wir innere Punkte.

3. Aufgabe: Was fällt Dir an den Koordinaten der inneren Punkte auf den Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ auf?

Was fällt Dir an den Koordinaten der Endpunkte A , B , C auf, für deren Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ es innere Punkte gibt?

Definition: Gitterstrecken, die keine inneren Punkte besitzen, nennen wir „primitiv“.

4. Aufgabe: Zeichne $D(12|3)$, $E(6|12)$, $F(12|8)$, $G(10|8)$. Wie viele innere Punkte jeweils besitzt $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$?

5. Aufgabe: Beobachte die „Bausteine“ der Strecken. Du kannst Dir vorstellen, die Strecken seien aus primitiven Strecken zu-

sammengesetzt. In wie viele Stücke zerfallen die Strecken jeweils?

6. Aufgabe: Wie viele innere Punkte jeweils besitzt $(9|13)$, $(10|11)$, $(12|7)$, $(5,8)$?

7. Aufgabe: Warum kann $(2|3)$ nicht auf der Strecke von O bis $(9|13)$ liegen?

8. Aufgabe: Welche Bedingung müssen die Endkoordinaten *nicht primitiver* Gitterstrecken erfüllen?

Welche Bedingung müssen die Endkoordinaten primitiver Gitterstrecken erfüllen?

9. Aufgabe: Zeichne die zu $P(2|3)$ gehörende Gitterstrecke. Warum ist sie primitiv?

10. Aufgabe: Erweitere die Strecke $\overline{OP}$ über P hinaus. Welches sind die nächsten Gitterpunkte auf der Verlängerung? Man kann diese Gitterpunkte berechnen!

11. Aufgabe: Die Strecke zu $(8|6)$ enthält offenbar innere Punkte. Bestimme ihre Koordinaten.

Aus welcher primitiven Gitterstrecke kann $(8|6)$ erzeugt werden? Wie oft paßt die primitive Gitterstrecke in $(8|6)$ hinein?

12. Aufgabe: Gegeben sind im Koordinatensystem die Punkte $A(1|3)$ und $B(9|14)$; stelle für die Strecke $\overline{AB}$ ähnliche Untersuchungen wie in den anderen Aufgaben an!

Nur bei nicht teilerfremden Zahlenpaaren findet man weitere Gitterpunkte auf der Strecke, der ggT gibt die Anzahl der Teilstrecken an. Vervielfachen beider Koordinaten führt zu weiteren Gitterpunkten auf der entsprechenden Geraden. Wenn die „primitive Strecke“ vervielfacht wird, erhält man alle Gitterpunkte.

Die verallgemeinernde Aufgabe 12 läßt uns erkennen: Nur bei nicht teilerfremden Differenzen der Endpunktkoordinaten findet man weitere Gitterpunkte auf der Strecke. Wandern über das „Dreieck der primitiven Strecke“ führt zu weiteren Gitterpunkten auf der entsprechenden Geraden. So ergibt sich auf natürliche Art ein Steigungsdreieck.

Die Beantwortung der Frage, ob $(39|91)$ zu der Geraden durch $(3|7)$ und $(728|365)$ zu der Geraden durch $(8|5)$ gehören, beför-

¹) Im Zusammenhang der anderen Aufgaben ist der vorgeschlagene Weg einfach; wird die Rechenaufgabe für sich gestellt, würde man eher anders rechnen:

$44 \cdot 45 = 22 \cdot 90$ (1. Faktor halbieren, 2. Faktor verdoppeln)
 $70 \cdot 74 = 70 \cdot 70 + 70 \cdot 4$ (Anwendung des Distributivgesetzes)

dert das Erkennen der Proportionalität $y : x = \text{const.}$ Gilt die Proportionalität für alle Zahlenpaare der Geraden?

$$x = k \cdot x_0 \text{ und } y = k \cdot y_0$$

$$\Rightarrow y : x = (k \cdot y_0) : (k \cdot x_0) = y_0 : x_0 = \text{const.}$$

Die Gleichung $y : x = \text{const.}$ gilt also für alle Paare, wenn sie für eines gilt. Sind die Koordinaten zweier Paare quotientengleich, so sind auch die Paare in sich quotientengleich.

Schülern mit guter mathematischer Auffassungsgabe wird man sicher auch in Klasse 6 schon folgende vertiefende Aufgaben stellen:

Welche Gitterpunkte enthält die Proportionalität $y : x = 4 : 3$?

Welche Gitterpunkte enthält die Proportionalität $(y - 2) : (x - 5) = 4 : 3$? Soll y direkt ausgerechnet werden, wird man die Schreibweise $y = y_0 + \text{const} \cdot (x - x_0)$ wählen.

Will man den Blick mehr in Richtung der Abbildungsgeometrie lenken, so bietet sich die folgende Aufgabenstellung an, die

sinnvolle Propädeutik der zentrischen Streckung, der Verschiebung und der Untersuchung deren Invarianten sein kann.

Die Schüler sollen die Querstrecken zwischen den inneren Punkten zweier Gitterstrecken $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ untersuchen. Die Frage nach dem Primitivsein solcher Querstrecken kann mittels Streckung und Verschiebung des „erzeugenden“ Ursprungsdreiecks beantwortet werden. Interessierte Schüler werden sich gerne mit dem Problem beschäftigen, zwei verschieden lange primitive Gitterstrecken zu finden, die parallel sind. Dies führt sie zurück zum Steigungsdreieck.

Anschrift des Verfassers:

StD Michael Spielmann, Wolfgangstr. 14, 42655 Solingen