fast die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler könnten beim Bruchzahlaspekt „Maßzahl; gemeine Brüche" ihre Leistungen signifikant verbessern, wenn sie zumindest die erste Grundvorstellung sicher beherrschten. Hieraus ergibt sich für den Mathematikunterricht, daß bei der Behandlung der Bruchrechnung erst dann im Unterricht fortgeschritten werden sollte, wenn möglichst alle Schülerinnen und Schüler zumindest die erste Grundvorstellung sicher beherrschen. Es ist ratsam, dies durch schriftliche Tests oder Klassenarbeiten zu überprüfen.

Ferner ergeben sich aus den Ergebnissen bezüglich unserer Untersuchungsfrage direkte Hinweise auf mögliche Differenzierungen. Bei schwächeren Schülerinnen und Schülern sollte man auf die Einführung der zweiten Grundvorstellung verzichten. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler sollten diese hingegen zusätzlich zur ersten Grundvorstellung kennenlernen (innere Differenzierung); denn dadurch werden diese Schülerinnen und Schüler zusätzlich gefördert. Ferner wird diesen Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gegeben, den Bruchzahlbegriff aus einer weiteren Perspektive zu betrachten. Speziell für Gesamtschulen besteht konkret die Möglichkeit, bei einer eventuellen Wiederholung der Bruchrechnung in Klasse sieben in den Mathematik-Erweiterungskursen die zweite Grundvorstellung der Bruchrechnung zu behandeln. In den Mathematik-Grundkursen, in denen sich eher die schwächeren Schülerinnen und Schüler befinden, sollte man dagegen auf die Behandlung der zweiten Grundvorstellung verzichten (äußere Differenzierung).

Ferner sollte man nicht ausschließlich die zweite Grundvorstellung im Unterricht einführen, da dies zu signifikant schlechteren Schülerleistungen beim Bruchzahlaspekt „Maßzahl; gemeine Brüche" führt als die Behandlung der ersten oder beider Grundvorstellungen im Unterricht. Werden beide Grundvorstellungen im Mathematikunterricht eingeführt, dann sollte den Schülerinnen und Schülern unbedingt auch die Ergebnisgleichheit beider Grundvorstellungen verdeutlicht werden, da hier nach unseren Untersuchungsbefunden ebenfalls große Defizite vorhanden sind.

Literatur

[1] *Behr, Merlyn, Lesh, Richard, Post, Thomas* und *Wachsmuth, Ipke*: Order and Equivalence of Rational Numbers. A Clinical Teaching Experiment. In: Journal for Research in Mathematics Education, 1984, Vol. **15**, No. 5, S. 323-341.

[2] *Behr, Merlyn, Lesh, Richard, Post, Thomas* und *Wachsmuth, Ipke*: Order and Equivalence of Rational Numbers. A Cognitive Analysis. In: Journal for Research in Mathematics Education, 1985, Vol. 16, No. 1, S. 18-36.

[3] *Hamilton, Eric, Landau, Marsha* und *Lesh, Richard*: Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. In: M. Landau und R. Lesh: Acquisition of Mathematics Concepts and Precesses, Evanston, IL (USA), 1983, S. 263-343

[4] *Neumann, Rainer*: Probleme von Gesamtschülern bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs - eine empirische Untersuchung. Diss., Universität Bielefeld, 1997 (in press.)

[5] *Oehl, Wilhelm*: Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Heidelberg ^{4}1968.

[6] *Padberg, Friedhelm*: Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg ^{2}1995.

[7] *Padberg, Friedhelm*: Didaktik der Bruchrechnung. Freiburg 1978.

[8] *Schlaak, Gustav*: Fehler im Rechenunterricht. Hannover 1968.

[9] *Schweizer, Wilhelm*: Zur Methodik und Didaktik des Bruchrechnens. **MU 1** (1955) Heft 2, S. 51-66.

[10] *Zech, Friedrich*: Mathematik erklären und verstehen. Berlin 1995.

Anschrift der Autoren:

Rainer Neumann, Ginsterweg 7, 32049 Herford
Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Hoffmannstr. 2, 33790 Halle/Westfalen

Lineare Algebra der Mittelstufe und Geometrie des Dreiecks

Michael Spielmann

1 Einleitung

Die folgenden Ausführungen verstehen sich als Anregung zu selbständiger Schülerarbeit. Auch Schüler der Mittelstufe sind durchaus in der Lage, an offenen Aufgabenstellungen weiterzuforschen. Will man die Förderung mathematisch begabterer Schüler ernstnehmen, können solche Aufträge in mehrfacher Hinsicht den Unterricht bereichern: die aktiven Schüler können ihr Potential durch das interessante und anspruchsvolle selbständige Arbeiten besser entfalten, sie werden vielleicht ihre Ergebnisse vor der Klasse vortragen und dabei Sicherheit in der Darstellung fachlicher Inhalte gewinnen, und die Klasse insgesamt erhält einen Eindruck von Mathematik, der über das Standardprogramm hinausreicht. Zur Bewältigung der Aufgabe sind folgende Kenntnisse vorauszusetzen: Die Formel für die Fläche eines Dreiecks, verbunden mit dem Satz, daß bei gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe die Fläche gleichbleibt, und die Geradengleichung.

2 Die Dreiecksfläche

Gegeben sind die Punkte $O(0/0)$, $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ im Koordinatensystem. Wir möchten die Fläche des Dreiecks OPQ bestimmen.

Da Grundlinie und Höhe nicht leicht berechenbar sind, wird man zu einem umfassenden Rechteck ergänzen und anschließend durch wegnehmen von Teildreiecken zum Ergebnis kommen.

$A_R - A_1 - A_2 - A_3 = x_2y_1 - 0{,}5x_2y_2 - 0{,}5(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) - 0{,}5x_1y_1$

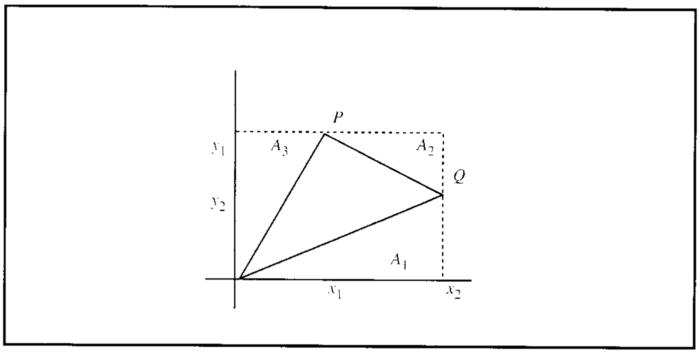

Fig. 1

Auflösen und zusammenfassen führen zum Ergebnis

$$A = 0{,}5(x_2y_1 - x_1y_2).$$

Es kann passieren, daß die Flächenmaßzahl ein negatives Vorzeichen erhält; das liegt natürlich an der zufälligen Reihenfolge der Punkte P und Q. Als Fläche wird man also den Betrag des Terms nehmen. Die Unabhängigkeit der Formel von der jeweiligen Lage von P und Q kann leicht an verschiedenen Skizzen (Fig. 2, 3) untersucht werden. Ich möchte mir das hier sparen, aber betonen, daß dies für Schüler eine gute Übung ist. Fortgeschrittene werden im Term die Determinante erkennen.

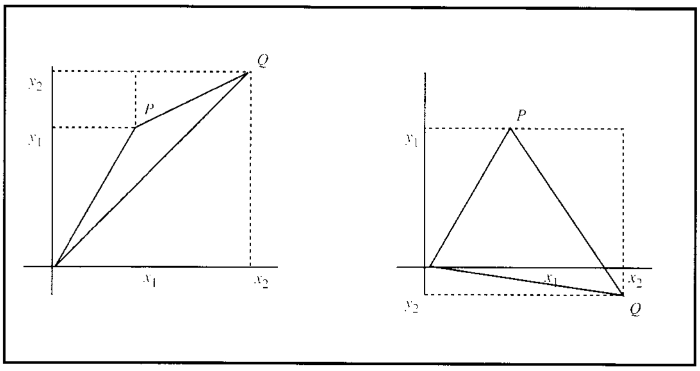

Fig. 2 Fig. 3

Bei Untersuchung des Terms fällt auf, daß im Vergleich zur herkömmlichen Dreiecksformel der Faktor 0,5 wieder auftaucht, ansonsten aber Grundseite und Höhe nicht, da der Term nicht auf einfache Art zu faktorisieren ist.

3 Die allgemeine Geradengleichung

Die Punkte P und Q legen eindeutig eine Gerade fest; daher stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Dreiecksgröße und den Parametern der Geradengleichung.

Bestimmen wir einmal aus den Punkten $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ die Gleichung $y = mx + n$ der Geraden $g(P;\ Q)$: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ ist nicht besonders aufregend; das aus den Punkten P und Q zu bildende Steigungsdreieck kann in der Fläche von OPQ liegen, es kann sie aber auch lediglich zum Teil überlagern. $y_2 = mx_2 + n$, einsetzen von m ergibt

$$\begin{aligned} y_2 &= (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \cdot x_2 + n \\ n_1 &= y_2 - (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \cdot x_2 \\ &= [y_2 (x_2 - x_1) - x_2(y_2 - y_1)]/(x_2 - x_1) \\ &= [x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_2 + x_2y_1]/(x_2 - x_1) \\ &= [x_2y_1 - x_1 y_2]/(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

in n taucht also genau dieser merkwürdige Term der Dreiecksfläche auf. Ganz grob betrachtet könnte dann doch $n(x_2 - x_1) = x_2y_1 - x_1y_2$ eine Rechteckfläche sein, mit dem doppelten Dreiecksinhalt.

Wie kann man sich diese Eigenschaft geometrisch vorstellen? Läßt sich ein geometrischer Zusammenhang zwischen der Fläche A des Dreiecks und dem Achsenabschnitt n der Geradengleichung finden?

4 Zusammenhang zwischen Dreiecksfläche und Geradengleichung

Scherung führt zur Lösung des Rätsels. (Fig. 4)

Behalten wir die Distanz der Punkte P und Q fest und bewegen wir diese Punktkombination auf der Geraden, so bleibt die Fläche von OPQ unverändert gleich: die Grundseite (Distanz PQ) und die Höhe (Distanz $d(O;\ g)$) verändern sich ja nicht.

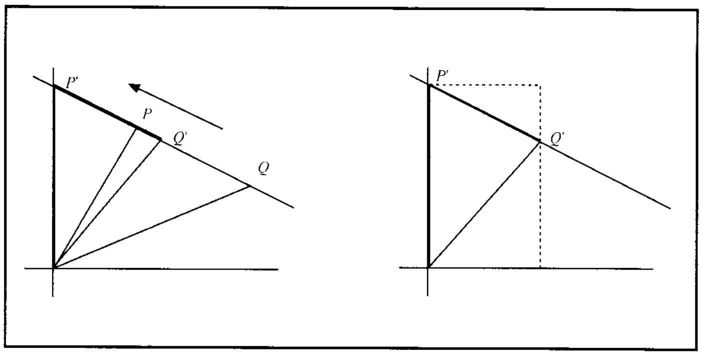

Fig. 4 Fig. 5

An der Zeichnung (Fig. 5) erkennt man sofort, daß zu n als Grundseite die x-Differenz $x_2 - x_1$ als Höhe gehört. Die unterschiedlichen Lagen möglicher Dreiecke erfordern jetzt noch einiges an Scherungen und Argumentationen, um eine vollständige Fallunterscheidung zu garantieren. Prinzipiell ist aber die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Dreiecksgröße und den Parametern der Geradengleichung beantwortet.

Einige weitere Fragen können sich anschließen. Hätte man nicht auch zum x-Achsenabschnitt hin scheren können? Wie wirkt sich der Spezialfall der waagerechten Geraden aus? Haben die Gerade durch O und P und die Gerade durch O und Q auch etwas mit der Dreiecksfläche zu tun?

Anschrift des Verfassers:

StD Michael Spielmann, Wolfgangstr. 14, 42655 Solingen