Inhalt

Anmerkungen zur Thematik

Die Idee der Optimierung ist eine zentrale Idee der Mathematik. Sie ist daher an sich schon wert, im Unterricht präsentiert zu werden.

Satz:
Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche.

Vielleicht haben die Schüler in unteren Klassen den Sinn des hier zu bearbeitenden Satzes erfahren; ein Beweis war ihnen jedoch nicht zugänglich.

Nun sollen die Schüler mittels der Arbeitsblätter verschiedene Beweise des Satzes erarbeiten. In Klasse 7 oder 8 sind sie algebraisch so weit fortgeschritten, dass sie den Beweis A nachvollziehen können. Die rein geometrischen Beweise B, C und D sind auch für jüngere Schüler verständlich.

Anmerkungen zur Methodik

Um den Schülern den Einstieg in die Problemlage zu erleichtern, kann man die DYNAGEO-Datei **umfConstant.Geo** am Computer bearbeiten lassen. Sie motiviert das Entdecken des Satzes, nicht des Beweises.
Günstig wäre eine Doppelstunde für diese Sequenz. Möglicherweise brauchen die Schüler mehr Zeit, als in der unten stehenden Planung vorgesehen. Die Sequenz lässt sich auf drei Unterrichtsstunden ausdehnen.

Anmerkungen zur JIGSAW-Methode

- Man teilt die Lerngruppe in 4 Kleingruppen.
- Die 4 Aufgaben werden auf die Gruppen so verteilt, dass jede Gruppe immer nur EINE Aufgabe bearbeitet. Sie hat 15 Minuten Zeit, die Aufgabe in Teamarbeit zu lösen.
- Nach etwa 15 Minuten bekommt jede Gruppe eine weitere Aufgabe, die sie wiederum in Teamarbeit löst. Nach dieser Zeit sollte jeder Schüler Experte für 2 Aufgaben sein.
- In jeder Gruppe wird ein Sprecher bestimmt, der die zuerst gelöste Aufgabe vorträgt. Nachfragen können mit Hilfe der Experten beantwortet werden.

Zeitplan für 90 Minuten		
dynageo am Computer	12 Minuten	Heuristik
Gruppenarbeit	3 Minuten	Vorstellen der Methode
	15 Minuten	erste Aufgabe
	15 Minuten	zweite Aufgabe
	10 Minuten	Vortrag erste Aufgabe
	2 Minuten	Fragen
	10 Minuten	Vortrag zweite Aufgabe
	2 Minuten	Fragen
	8 Minuten	Vortrag dritte Aufgabe
	2 Minuten	Fragen
	8 Minuten	Vortrag vierte Aufgabe
	2 Minuten	Fragen

Es wird angestrebt, dass jeder Schüler Verständnis entwickelt für die unterschiedlichen Beweisgedanken.

Zwei der Beweise sollte er gut verstanden haben.

Bezug zum Kernlehrplan

Folgende allgemeine Kompetenzbereiche werden berührt:

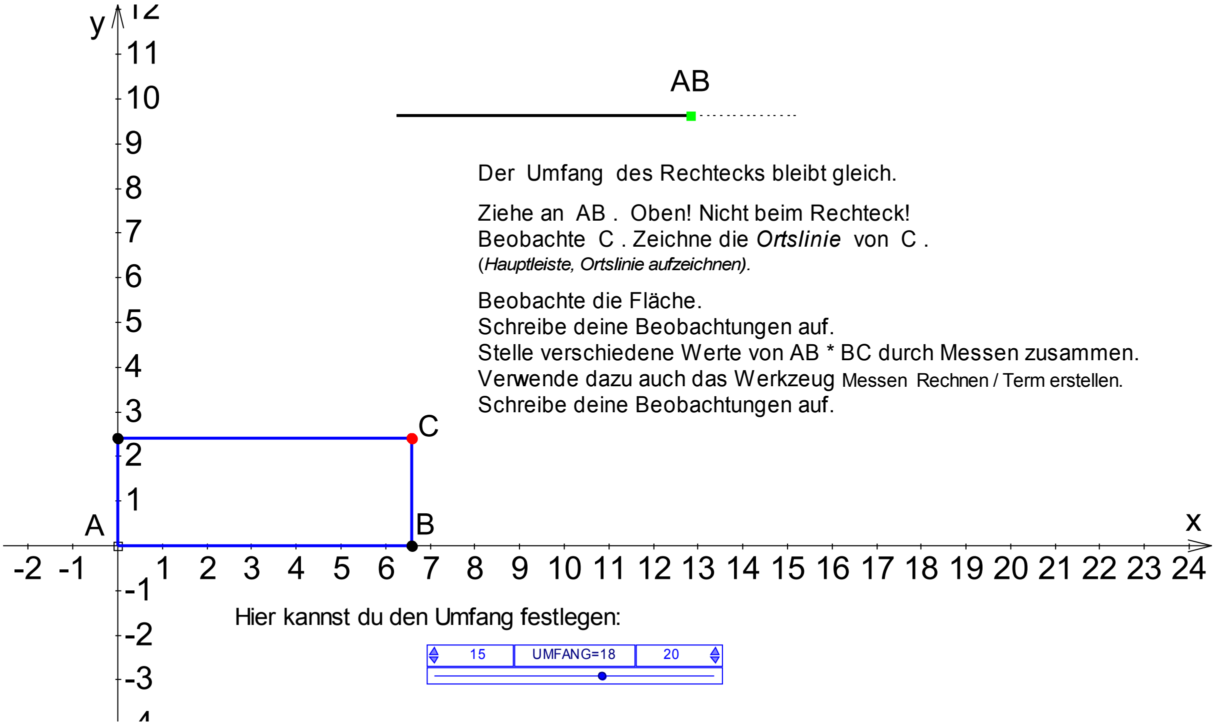
Argumentieren und Kommunizieren,
Problemlösen,
Werkzeuge und Medien

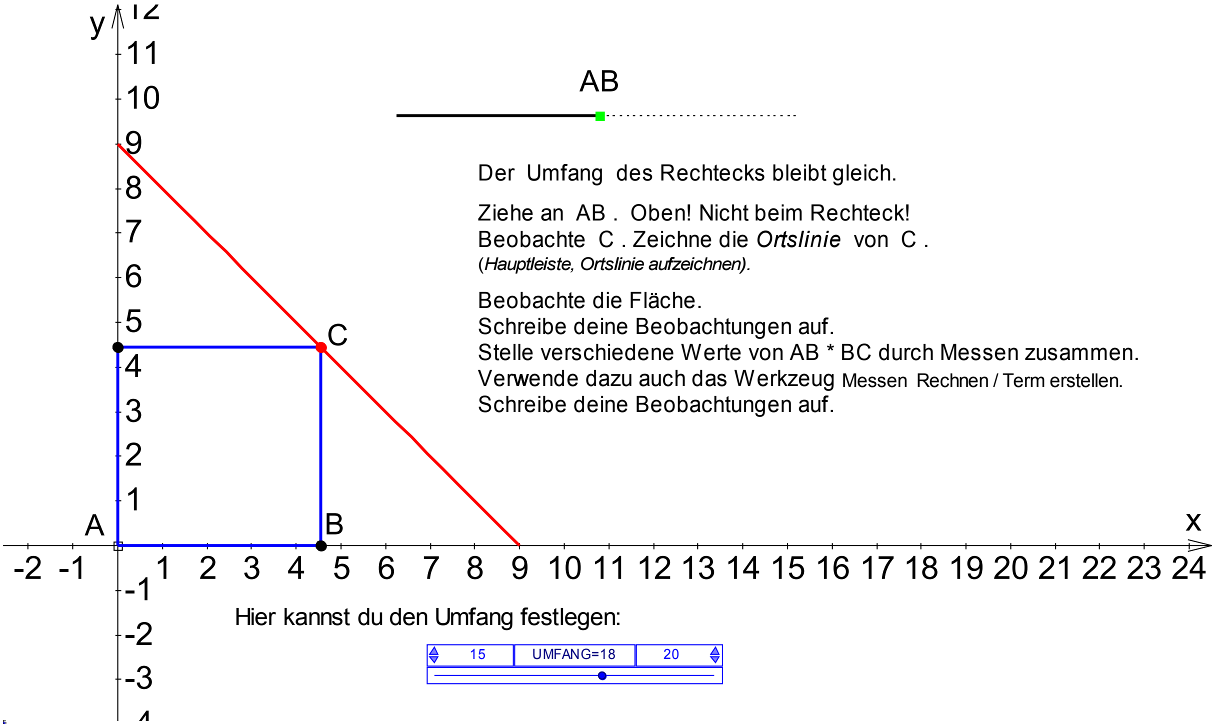
Fachbezogene Kompetenzen sind den Bereichen

Algebra: Termumformung, Vergleichen
Funktionen: lineare Funktion, antiproportionale Zuordnung
Geometrie: Umfang und Fläche

zuzuordnen.

Bildschirmabdruck der Datei **umfConstant.Geo**





Arbeitsblatt 1

Satz:
Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche.

Beweis A mit Algebra

	Umfang	**Seite**	**Seite**	**Fläche**
Rechteck	$2a+2b$	a	b	$a\cdot b$
Quadrat	$2a+2b$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{1}{2}(a+b)$

Den Term der Quadratfläche formen wir geschickt um.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(a+b)^2 &= \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)\\ &= \frac{1}{4}(a^2-2ab+4ab+b^2)\\ &= \frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}\cdot 4ab\\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2+ab\\ &\geq ab\end{aligned}$$

Du solltest
die Terme verstehen,
die Schritte nachvollziehen,
durchdenken,
mit deinem Partner besprechen,
schriftlich kommentieren.

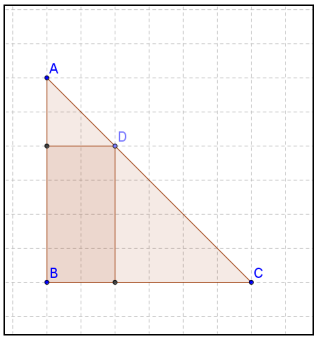
Du hast die Aufgabe gelöst, wenn du genau begründen kannst, wieso durch die Rechnung nun der Satz bewiesen ist.

Notizen:

Arbeitsblatt 2

Satz:
Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche.

Beweis B mit Geometrie



Hilfe: Wenn man in ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ein Rechteck zeichnet und die Ecke D (Bild) auf AC verschiebt, bleibt der Umfang des Rechtecks gleich. Das ist leicht zu beweisen, muss aber jetzt nicht bewiesen werden.

Verlängere die kürzere Seite b des Rechtecks auf Quadratseitenlänge x, behalte aber den Umfang bei. Die Linie g kann dir dabei helfen, das x zu finden.

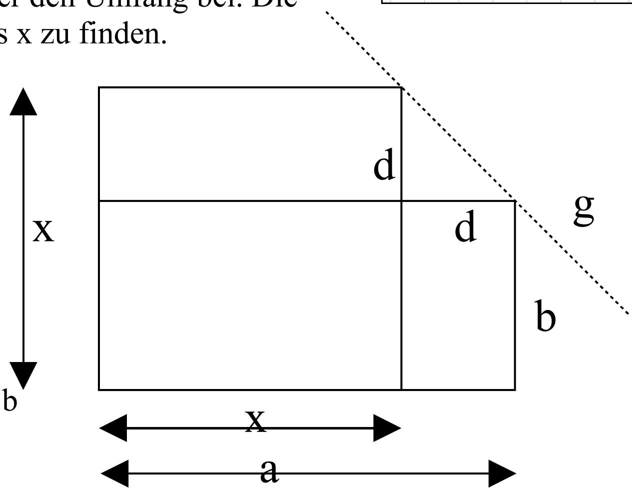
Dann gilt

$$x \geq b$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot d \geq b \cdot d$$

Was bedeutet x·d? Was ist b·d?

Vergleiche die Rechteckfläche a·b mit der Quadratfläche x².



Du hast die Aufgabe gelöst, wenn du genau begründen kannst, wieso durch die Figur nun der Satz bewiesen ist.

Notizen:

Arbeitsblatt 3

Satz:
Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche.

Beweis C mit Geometrie

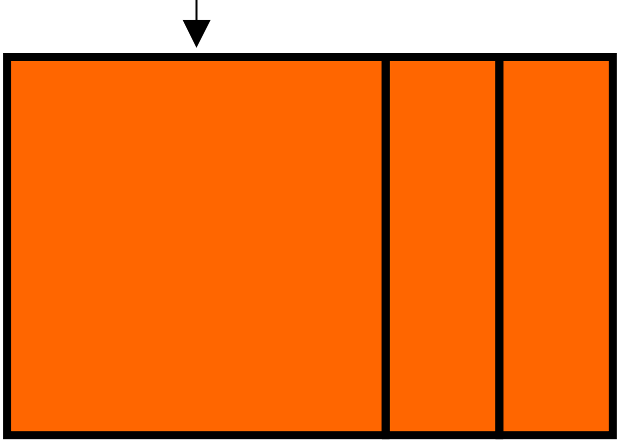
Schneide von dem Rechteck (siehe unten) ein größtmögliches Quadrat ab.

Teile den Rest in zwei gleiche Teile und setze sie an das Quadrat. Das entstehende „Sechseck“ hat den gleichen Umfang und die gleiche Fläche wie das Rechteck.

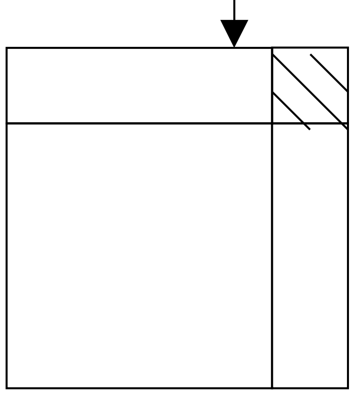
Beobachte, was mit Umfang und Fläche passiert, wenn man jetzt das schraffierte Quadrat ergänzt.
Du hast die Aufgabe gelöst, wenn du genau begründen kannst, wieso durch die Figur nun der Satz bewiesen ist.

Notizen:

ausschneiden



Skizze



Arbeitsblatt 4

Satz:
Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche.

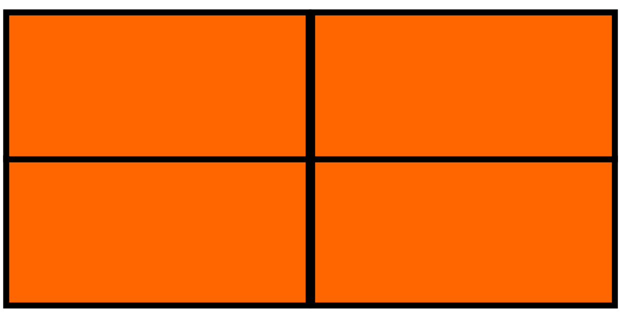
Beweis D mit Geometrie

Zerschneide das Rechteck in die vier kleinen Rechtecke und lege sie nach dem Muster zusammen.
Vergleiche den (äußeren) Umfang der linken und der rechten Figur.
Mach dir klar, was du beweisen willst.

Du hast die Aufgabe gelöst, wenn du genau begründen kannst, wieso durch die rechte Figur nun der Satz bewiesen ist.

Notizen:

ausschneiden



Skizze