Optimierung in der Geometrie (maximale, minimale Flächen)

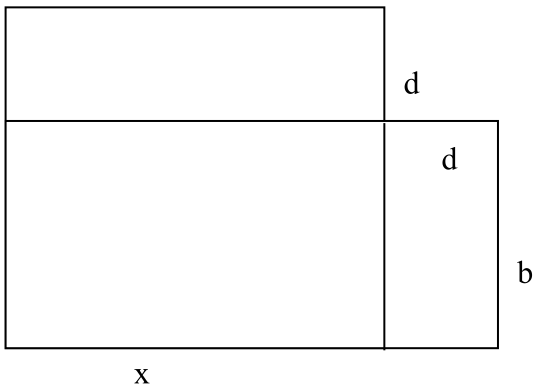
1. Rechteck mit maximaler Fläche bei gleichem Umfang

(a) Beweis mit Algebra

Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche.
Beweis:
U rechteck = 2a + 2b
U quadrat = 2a + 2b, Quadratseite = (a + b):2 .
Die Fläche des Quadrates ist daher
$(a+b)^2:4 = (a^2+2ab+b^2):4 =(a^2-2ab+4ab+b^2):4=(a^2-2ab+b^2):4 + 4ab:4=(a - b)^2:4 + ab > ab$

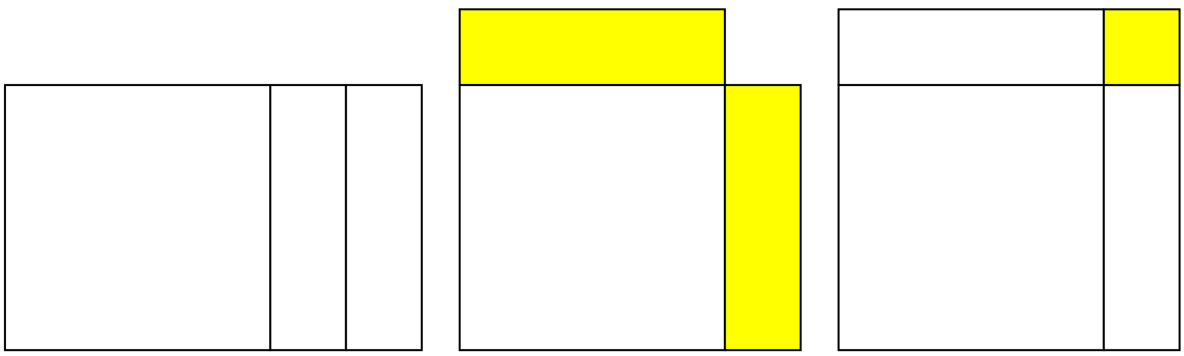
(b) Beweis mit Geometrie

Behalte den Umfang bei, verlängere die kürzere Seite b des Rechtecks auf Quadratseitenlänge x.
Dann gilt wegen $x > b$
$x \cdot d > b \cdot d$
also ist die Fläche bei gleichem Umfang größer geworden.



(c) Beweis mit Geometrie

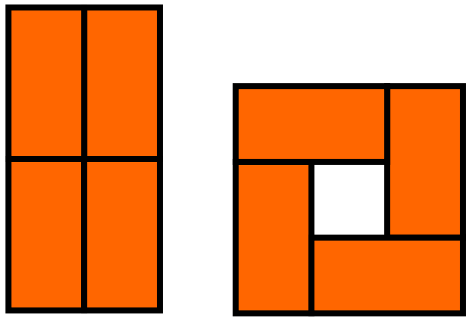
Schneide von dem Rechteck ein größtmögliches Quadrat ab. Teile den Rest in zwei gleiche Teile und setze sie an das Quadrat. Das entstehende Sechseck hat den gleichen Umfang und



die gleiche Fläche wie das Rechteck.
Eine Ergänzung zum großen Quadrat behält den Umfang bei, vergrößert aber die Fläche.

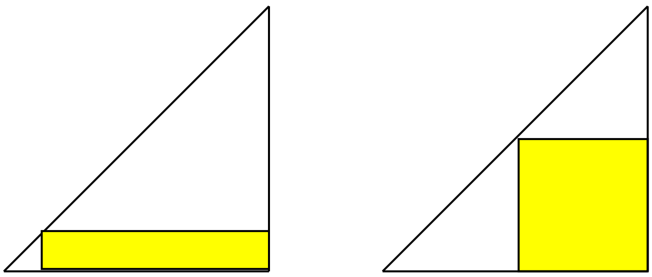
(d) Beweis mit Geometrie

Der Umfang des linken Rechtecks ist $4a + 4b$.
Legt man die Teilrechtecke zu einem Quadrat zusammen, so ist dessen Umfang immer noch $4a + 4b$, die Fläche aber um ein inneres Quadrat größer geworden.



2. In ein Dreieck einbeschriebenes Rechteck maximaler Fläche

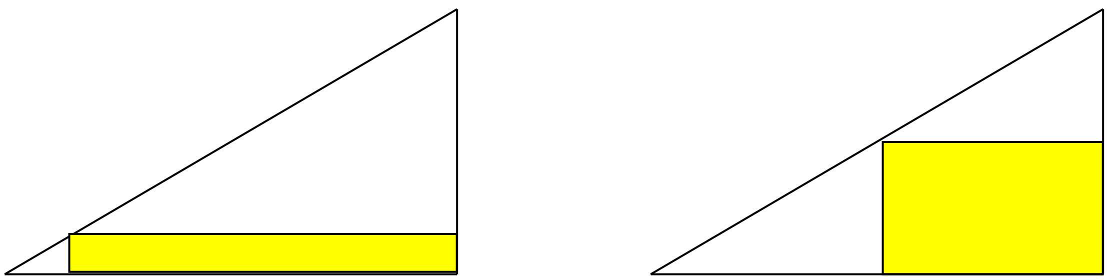
2.1. In ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck soll ein Rechteck mit maximaler Fläche einbeschrieben werden.



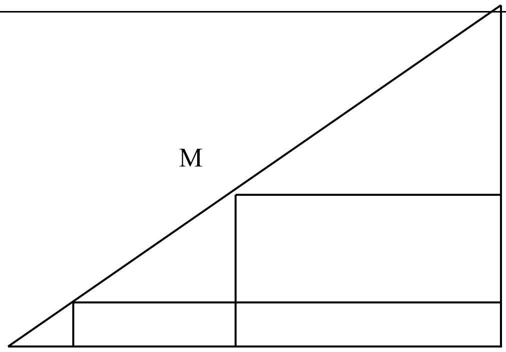
Das Rechteck hat konstanten Umfang; der ist gleich der doppelten Schenkellänge.
Es hat also die größte Fläche in Form des Quadrates, also in der Mittenlage.

2.2. Wir verändern die Figur.

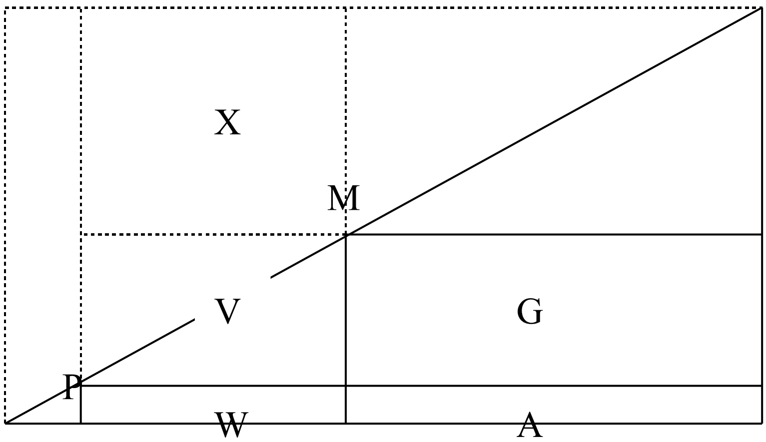
Jetzt eine Idee, die jüngere Schüler vielleicht nicht so einfach nachvollziehen können; ODER DOCH??: Wir fassen das Dreieck als „Gummidreieck“ auf und ziehen an der linken Ecke.



Was passiert? Was ändert sich? Was kann man beobachten?
Der Umfang der Rechtecke bleibt nicht mehr konstant gleich der doppelten Seite.
Also klappt die Argumentation nicht mehr.
Das große Rechteck wird von den Seitenmitten gebildet. Ist es das größte? Oder ist das größte wieder ein Quadrat?



Wir zeigen, dass das Rechteck mit Ecke M, dem Mittelpunkt der Seite, größer als alle anderen ist.



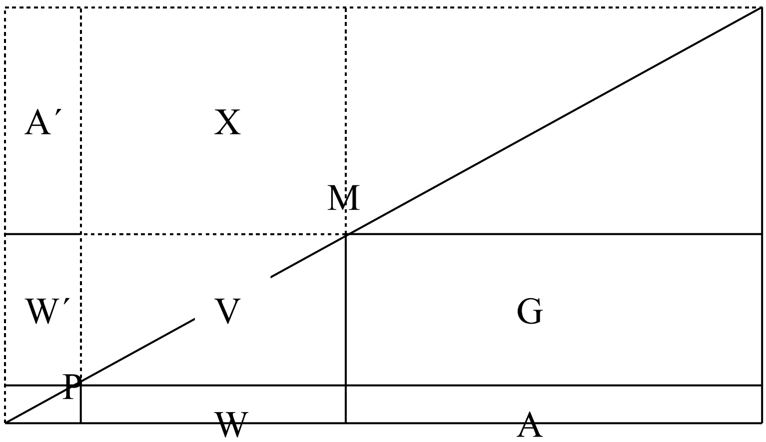
Wir ergänzen zum Rechteck.
Wir benennen die Teilflächen mit Buchstaben.
M und P sind Punkte, G, A, X, V, W sind Flächen.
Im ersten Fall liegt P links von M.
Wir wollen G + A mit W + A vergleichen.
Wegen der Diagonale gilt
G = X.
Weil M Mitte ist, gilt

$X = V + W$

$\Rightarrow \; G = V + W$

$\Rightarrow \; G + A = V + W + A$

$\Rightarrow \; G + A > W + A$



Im zweiten Fall liegt P rechts von M. Dieser Fall ist prinzipiell genauso zu zeigen.
Man kann aber auch folgendermaßen argumentieren.
Wir betrachten die Figur **von oben**, dann liegt P links von M.

Und es gilt

$G + A = X + A'$

und

$W + A = W' + A'$

und die Argumentation läuft wie oben.

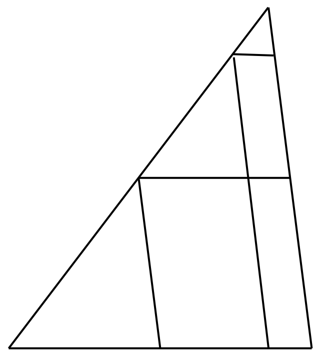
3. Aufgaben

<u>Aufgabe 1</u>: Einem beliebigen Dreieck ist ein Parallelogramm so einbeschrieben, dass zwei Seiten auf den Dreiecksseiten liegen. Es hat maximale Fläche, wenn die freie Ecke auf der Mitte der dritten Seite liegt.
Beweise den Satz.

<u>Aufgabe 2</u>: Zerlege die feste Zahl c in zwei Summanden a und b, und bestimme a und b so, dass $a^2 + b^2$ minimal ist.

<u>Aufgabe 3</u>: Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite auf der Hypotenuse liegt. Es hat maximale Fläche, wenn die Ecken auf der Mitte der Katheten liegen.
Beweise den Satz. Verallgemeinere den Satz.

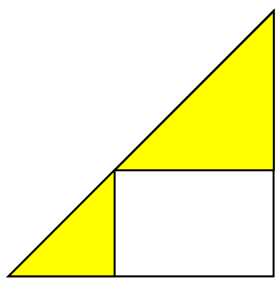
<u>Aufgabe 4</u>: Formuliere einen Satz über das maximale einbeschriebene Rechteck in beliebiger Lage.



<u>Lösung 1</u>: Der Beweis läuft analog demjenigen für das Rechteck.

<u>Lösung 2</u>:

algebraischer Beweis ähnlich dem Beweis unter 1(a):
Vermutlich ist das Minimum bei a = b = c/2 zu finden.



$$a^2 + b^2 = 2\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2}$$

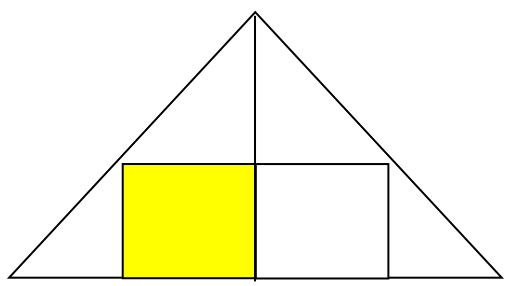
aber

$$\left(\frac{c}{2}+d\right)^2 + \left(\frac{c}{2}-d\right)^2 = \frac{c^2}{4} + cd + d^2 + \frac{c^2}{4} - cd + d^2$$

$$= \frac{c^2}{2} + 2d^2 > \frac{c^2}{2}$$

geometrischer Beweis mit Hilfe des Satzes aus 2.1
c ist die Kathete des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, a und b sind die Hypotenusen der auf der Hypotenuse liegenden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke. Die verlangten Quadrate sind hier halbiert als Dreiecke zu sehen. Sie sind minimal, wenn die weiße Fläche maximal ist.
Diese ist maximal,
wenn a = b = c/2.

<u>Lösung 3</u>:

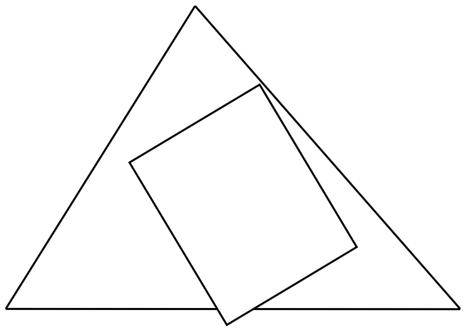


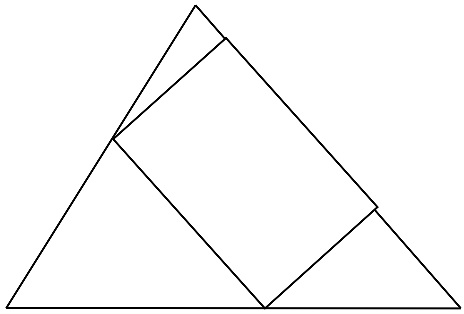
Die Lösung liefert - zunächst überraschend – kein Quadrat. Man findet nämlich, dass hier der Umfang nicht konstant ist. Ist das Rechteck flach, so ist der Umfang nahe der doppelten Hypotenuse, ist das Rechteck schmal hoch, so ist der Umfang nahe der doppelten Höhe.
Trick:
Halbiere das Dreieck durch die Höhe.
Dann hat das einbeschriebene Quadrat maximale Fläche. Verdopplung führt zur

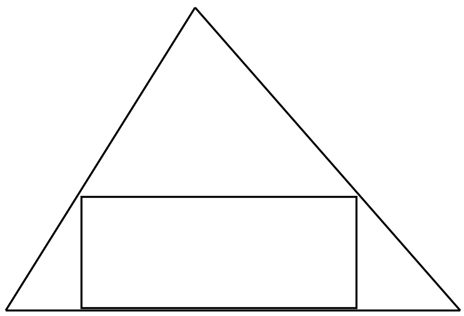
Lösung.
Der Satz ist verallgemeinerbar auf nichtrechtwinklige gleichschenklige Dreicke.
Die Höhe ermöglicht es, den Satz vom einbeschriebenen Parallelogramm anzuwenden.

Lösung 4:

Das einem Dreieck einbeschriebene Rechteck maximaler Fläche liegt mit einer Seite auf einer Dreiecksseite und mit den freien Ecken auf den Mitten der anderen Seiten.
Das beweisen wir so:
Ist eine Ecke des Rechtecks frei, so könen wir das Rechteck drehen bis eine Seite auf einer Dreiecksseite liegt. Dann ist aber wieder eine Ecke frei, und wir können das Rechteck vergrößern.
Wir gehen also jetzt davon aus, dass eine Seite des Rechtecks auf einer Dreiecksseite liegt.







Jetzt geht es weiter wie bei Aufgabe 3.

4. Literatur

- Quaisser/ Sprengel: Extrema,
  Harri Deutsch 1986
- Schupp, Hans: Optimieren,
  BI Wissenschaftsverlag 1992
- Baptist, Peter: Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie,
  BI Wissenschaftsverlag 1992
- Scriba/ Schreiber: 5000 Jahre Geometrie,
  Springer 2000