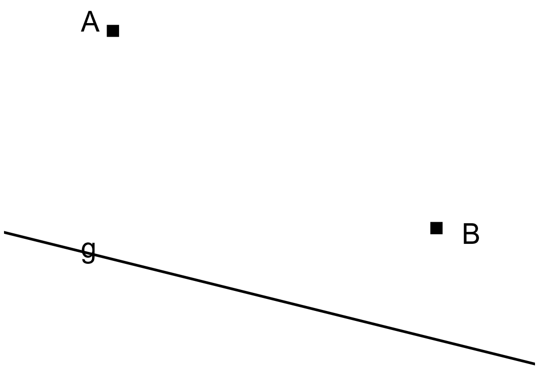
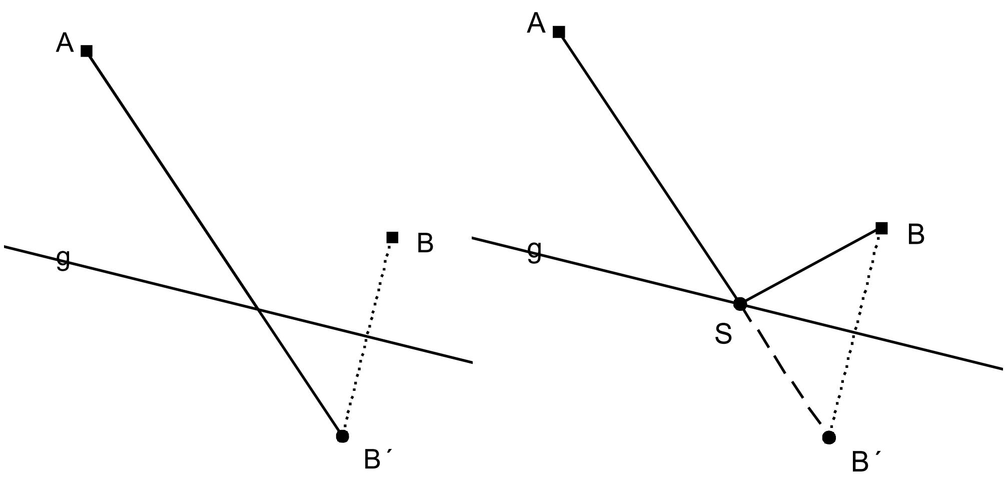
Optimierung in der Geometrie

A) kürzeste Wege mit Spiegelung

1. Die Feuerwehr-Aufgabe
   (kürzester Weg von A über g nach B)



Bei B brennt es; die Feuerwehr muss von A aus am Fluss g Wasser tanken. Welchen Weg nimmt sie, wenn es der kürzeste sein soll?



Lösung:

B wird an g gespiegelt zu B´;
BB´ schneidet g in S;
ASB ist der kürzeste Weg.

Von Schülern vorgeschlagene Strategien:
AB, Mittelsenkrechte / Lot von A und B auf g, davon die Mitte nehmen /
Lot von A auf g, von B dorthin, dann zu A / rechter Winkel auf g./

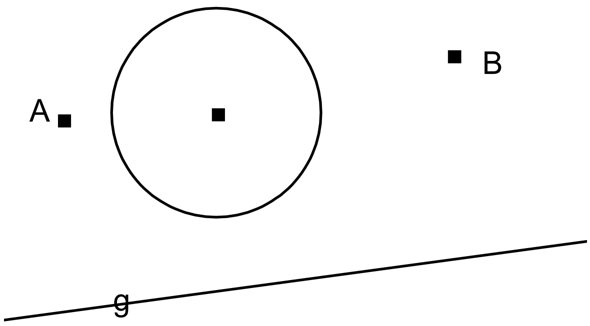
Einige dieser Vorschläge lassen sich leicht widerlegen.

2. Analogie: Reflexion

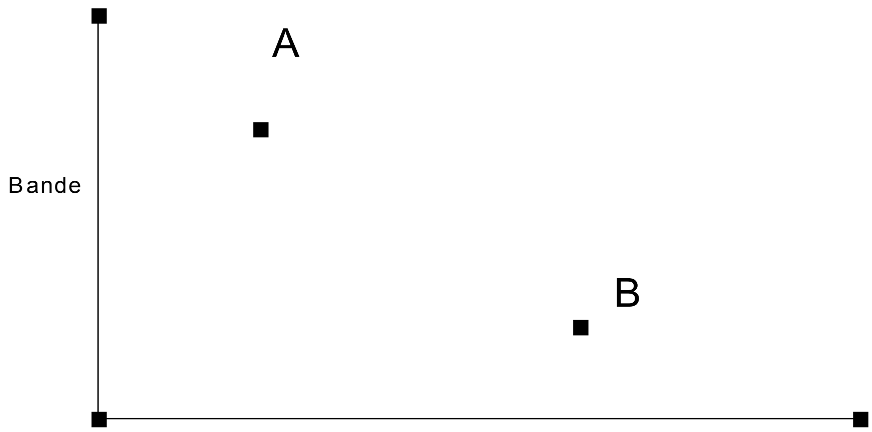
Ein Lichtstrahl von A nach B, der am Spiegel g reflektiert wird, nimmt den kürzesten Weg. Die Reflexionswinkel sind gleich.

3. Übungen

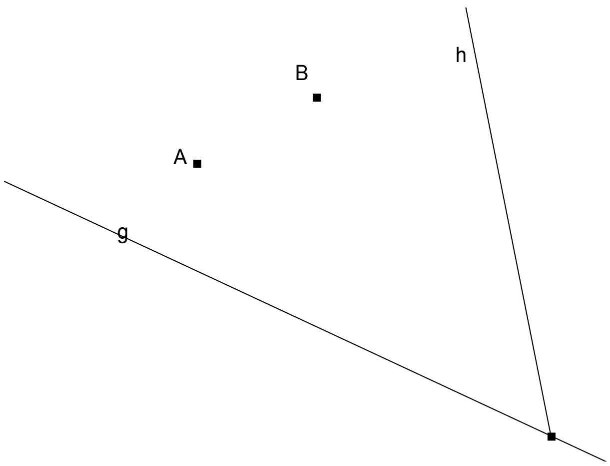
Aufgabe 1:
Von A soll ein Lichtsignal nach B gesendet werden; ein Hindernis steht im Weg. Finden wir auf g einen Punkt für den Spiegel?



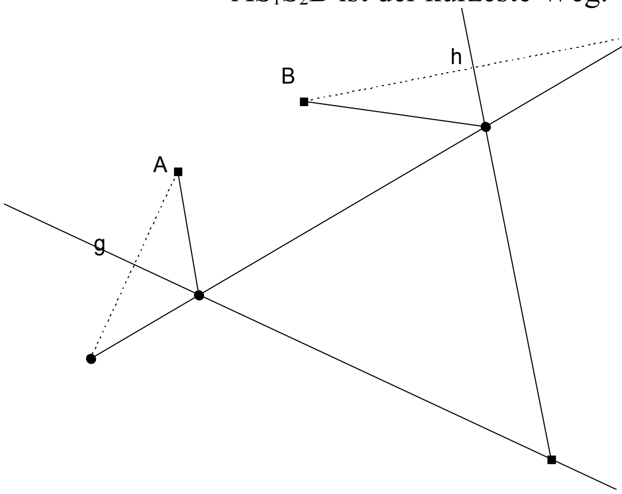
Aufgabe 2:
Bei A liegt eine Billardkugel, die über die Bande den Ball B treffen soll.



4. Die Feuerwehr-Aufgabe mit zwei Geraden (kürzester Weg von A über g über h nach B)



Lösung: A wird an g gespiegelt zu A´;B wird an g gespiegelt zu B´;
A´B´ schneidet g und h in S_1 und S_2;
AS_1S_2B ist der kürzeste Weg.

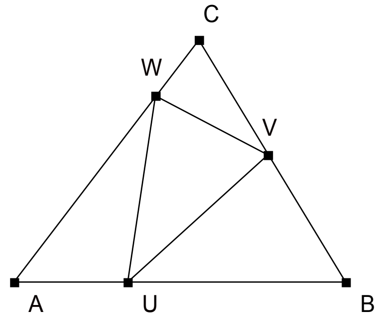


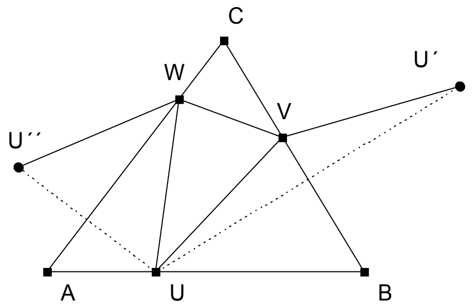
5. Übungen

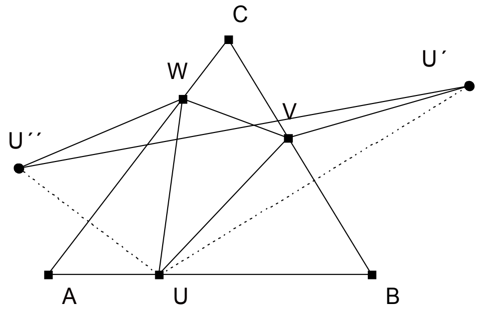
<u>Aufgabe 3:</u>
Optimiere den Weg bei stumpfem Schnittwinkel der Banden bzw. der Geraden g und h.
<u>Aufgabe 4:</u>
Optimiere den Weg bei spitzem Schnittwinkel der Geraden g und h und A = B.
<u>Aufgabe 5:</u>
Auf dem Billardtisch liegt bei A eine Billardkugel, die über zwei Banden den Ball B treffen soll.
<u>Aufgabe 6:</u>
Bei A liegt eine Billardkugel, die über drei Banden den Ball B treffen soll.

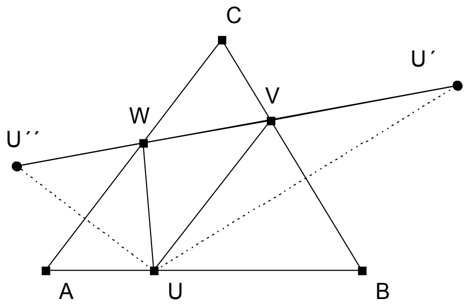
6. Und jetzt der kürzeste Weg im Dreieck

Gegeben ist ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Punkten U auf AB, V auf BC, W auf CA.
Wie müssen U, V, W liegen, damit das Dreieck UVW minimalen Umfang hat?
Auch hier hilft Spiegelung.
Wir halten zunächst den Punkt U fest und optimieren die Lage von V und W.







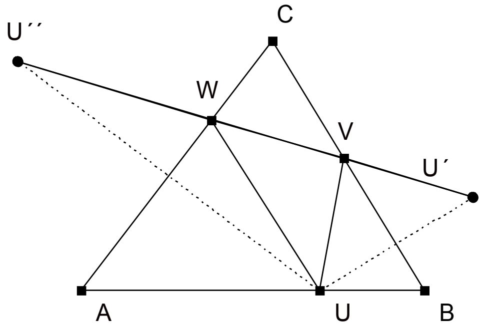


Damit haben wir die optimale Lage für V und W gefunden.
Wo aber liegt U im besten Fall?
<u>Tip</u>: Blick erweitern: auf Veränderungen und auf Invarianzen achten!

Was hat sich bei der Optimierung von V und W nicht geändert?
Gibt es Punkte, die gleich geblieben sind, gibt es Winkel, die gleich geblieben sind?
Welche Winkel haben sich geändert?
Was ändert sich, wenn wir U verschieben?

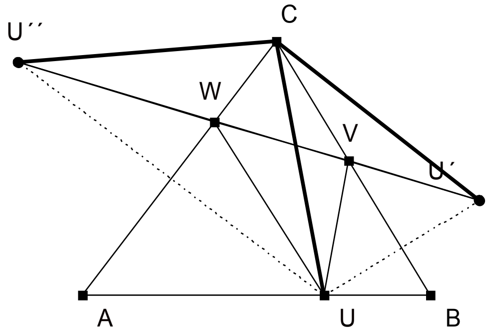
Mögliche Überlegungen:

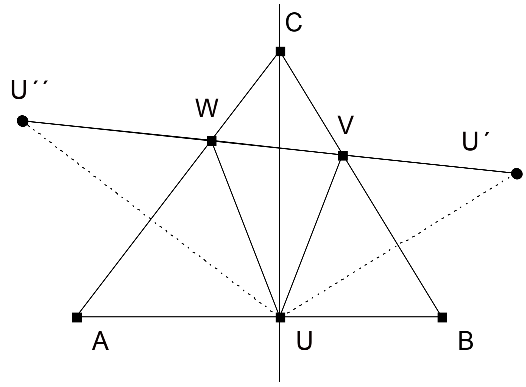
U´ und U´´ haben sich nicht geändert, da sie von U abhängen.
Die Reflexionswinkel ändern sich abhängig von V und W.



V und W ändern ihre Lage abhängig von U.

Der eine Reflexionswinkel wird kleiner, der andere größer.
Wenn man U mit C verbindet, wird γ geteilt und es gilt $\measuredangle U'CU'' = 2\gamma$.
Es sind drei gleichschenklige Dreiecke entstanden: $\Delta UCU'$, $\Delta UCU''$und $\Delta U'CU''$.
Seine Schenkel sind jeweils gleich CU.
Seine Basis ist die zu minimierende Strecke.
2γ , der Winkel in der Spitze, bleibt immer gleich.
Bei gleichem Winkel ist die Basis minimal, wenn die Schenkel minimal sind!!!
Die sind aber am kürzesten, wenn CU minimal ist.





CU ist minimal, wenn U Lotfußpunkt ist.

7. Übungen

<u>Aufgabe 7:</u>
Wäre ein anderes Dreieck UVW entstanden, wenn wir V festgehalten hätten?

<u>Aufgabe 8:</u>
Wird das minimale Dreieck UVW bei einem gleichschenkligen Dreieck ABC auch gleichschenklig?

<u>Aufgabe 9:</u>
Wieso macht ein rechtwinkliges Dreieck ABC Probleme?

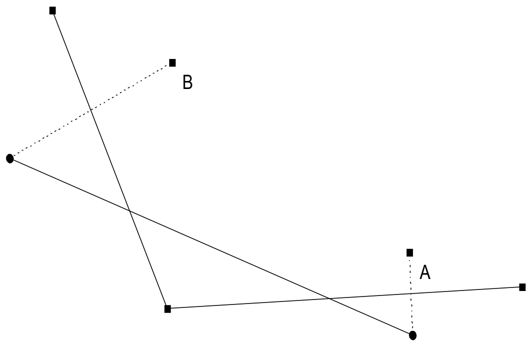
<u>Aufgabe 10:</u>
Die Reflexionswinkel müssten eigentlich von α ,β und γ abhängen. Kannst du sie ausdrücken?

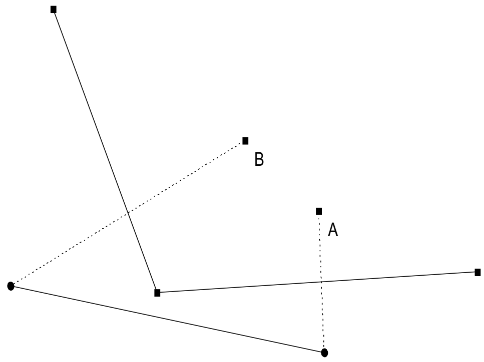
8. Lösungen

Aufgabe 1:
Von A soll ein Lichtsignal nach B gesendet werden; ein Hindernis steht im Weg. Finden wir auf g einen Punkt für den Spiegel?
Das Hindernis wird getroffen.

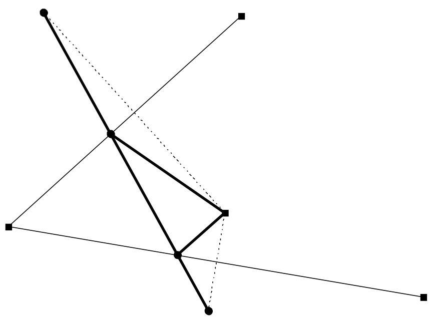
Aufgabe 2:
Bei A liegt eine Billardkugel, die über die Bande den Ball B treffen soll.
Spiegeln führt zum Ziel.

Aufgabe 3:
Optimiere den Weg von A nach B bei stumpfem Schnittwinkel der Banden bzw. der Geraden g und h.
Es gibt nicht in jeder Lage ein Minimum, da der Weg das Winkelfeld unter Umständen nicht trifft.

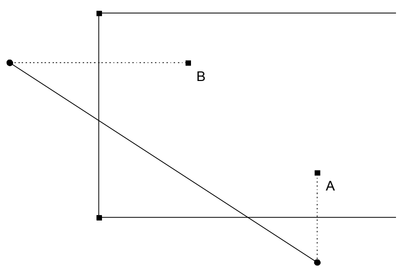




Aufgabe 4:
Optimiere den Weg bei spitzem Schnittwinkel der Geraden g und h und A = B.



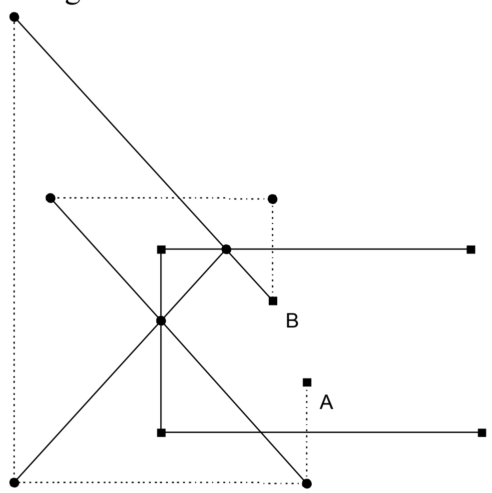
Aufgabe 5:
Bei A liegt eine Billardkugel, die über zwei Banden den Ball B treffen soll.



Die Lösung ist nicht in jeder Lage möglich.

<u>*Aufgabe 6:*</u>
Bei A liegt eine Billardkugel, die über drei Banden den Ball B treffen soll.

Die Zeichnung zeigt zwei Wege der Konstruktion.



<u>*Aufgabe 7:*</u>
Wäre ein anderes Dreieck UVW entstanden, wenn wir V festgehalten hätten?

Die Punkte U, V, W sind gleichwertig, der Lösungsweg ist also symmetrisch. Und wenn es Lotfußpunkte sind, dann sind sie auch eindeutig.

<u>*Aufgabe 8:*</u>
Wird das minimale Dreieck UVW bei einem gleichschenkligen Dreieck ABC auch gleichschenklig?

Zeichnen deutet auf Gleichschenkligkeit hin.

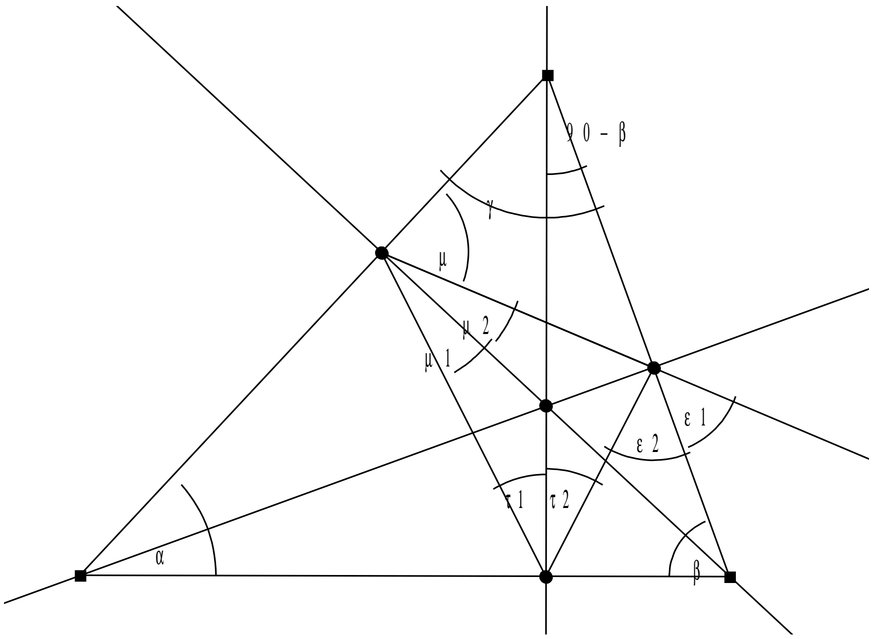
<u>*Aufgabe 9:*</u>
Wieso macht ein rechtwinkliges Dreieck ABC Probleme?

Zwei Lote treffen sich bei der rechtwinkligen Ecke. Es entsteht also kein Dreieck UVW.

Aufgabe 10:

Die Reflexionswinkel müssten eigentlich von α, β und γ *abhängen. Kannst du sie ausdrücken?*

Wir rechnen die Winkel aus.



$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$\mu_1 = \mu_2$

$\tau_1 = \tau_2$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_2 = 2\mu_1 + 2\tau_1$ (Außenwinkel)

$\Rightarrow \varepsilon_2 = \mu_1 + \tau_1$

$\varepsilon_2 = 90° - \beta + \tau_2$ (Außenwinkel)

$\Rightarrow \mu_1 = 90° - \beta = \mu_2$

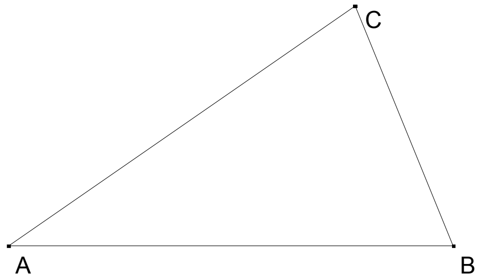
da aber $\mu + \mu_2 = 90°$

$\Rightarrow \mu = \beta$

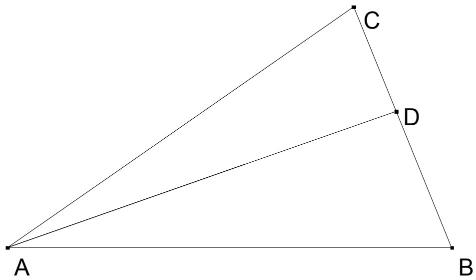
B) kürzeste Wege mit Dreiecksungleichung

Satz: Dreiecksungleichung (im weiteren *DrUng*)

In jedem Dreieck ABC gilt, dass die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite ist.
AB + BC > AC, BC + CA > BA, CA + AB > CB
(Diesen Satz beweisen wir später.)



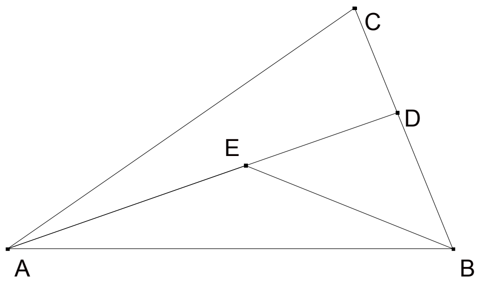
Satz: Gegeben ist Δ ABC mit D$\in$ BC .
Dann gilt AC + CB > AD + DB.



Beweis:

AC + CB = AC + CD + DB
= (AC + CD) + DB
> AD + DB nach DrUng. #

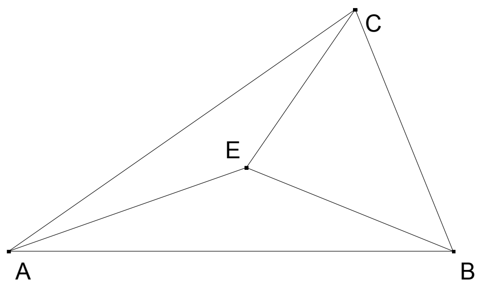
Satz: Gegeben ist Δ ABC mit D$\in$ BC und E$\in$ AD .
Dann gilt AC + CB > AE + EB.



Beweis:

AC + CB > AD + DB
= AE + EB + DB
= AE + (EB + DB)
> AE + EB nach *DrUng*. #

Satz: Gegeben ist Δ ABC mit innerem Punkt E.
Dann gilt AB + BC + CA > EA + EB + EC.



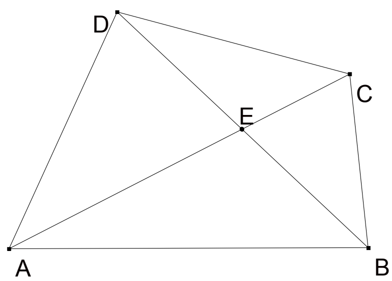
Beweis:

AC + CB > AE + EB und
CB + BA > CE + EA und
BA + AC > BE + EC nach *DrUng*.
Wir vergleichen die Summe der linken Seiten und die Summe der rechten Seiten:

2 (AB + BC + AC) > 2 (EA + EB + EC)

AB + BC + AC > EA + EB + EC. #

Satz: Gegeben ist ein Viereck ABCD.
Dann gilt
AB + BC + CD + DA > AC + BD.



Beweis:

Nach *DrUng* gilt

$AB + BC > AC \wedge CD + DA > AC \wedge BC + CD > BD \wedge DA + AB > BD$

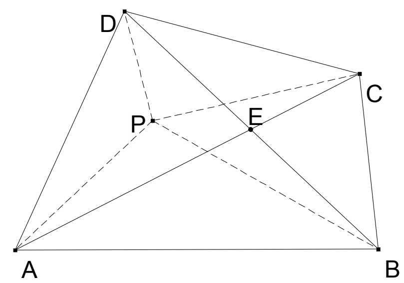
Wir vergleichen die Summe der linken Seiten und die Summe der rechten Seiten:

$$2\,(AB + BC + CB + DA) > 2\,(AC + BD)$$

$$AB + BC + CD + DA > AC + BD.\ \#$$

Satz: Gegeben ist ein Viereck ABCD mit innerem Punkt P und Diagonalenschnittpunkt E und $E \neq P$.
Dann gilt
$AP + BP + CP + DP > AE + BE + CE + DE$.

Das bedeutet, dass der Diagonalenschnittpunkt der Punkt mit minimaler Entfernungssumme zu den Ecken eines Vierecks ist.



Beweis:

P liege zum Beispiel in AED. Bei anderen Lagen läuft der Beweis entsprechend.

Nach *DrUng* gilt

$AP + PC > AC \wedge DP + PB > BD$

$\Rightarrow AP + PC + DP + PB > AC + BD$

$\Rightarrow AP + PC + DP + PB > AE + BE + CE + DE.\#$

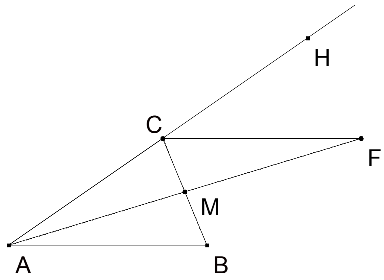
Anhang
Beweis der Dreiecksungleichung

Satz:

Ein Außenwinkel ist größer als ein nicht anliegender Innenwinkel.

Beweis:

Verlängere AC über C hinaus, dabei entsteht der Außenwinkel $\angle BCH$;
spiegele ΔABM an M. Das Bild von A sei F,
F liegt im Winkelfeld von $\angle BCH$;
es gilt also $\angle BCH > \angle BCF$
und mit $\angle BCF = \angle CBA$ gilt also
$\angle BCH > \angle CBA$.
Entsprechend argumentiert man mit Verlängerung von BC für den anderen Innenwinkel.#



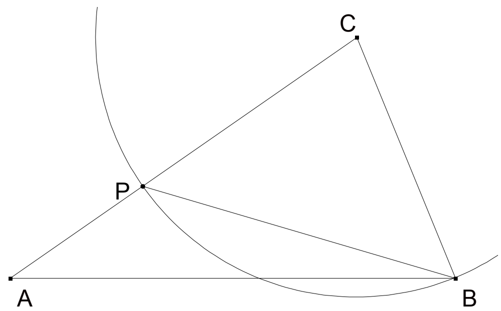
Schneller ist der Beweis mit dem Außenwinkelsatz erbracht, er setzt allerdings den Satz von der Winkelsumme voraus.

Beweis:

Der Außenwinkel ist gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.
$\angle BCH = \angle BAC + \angle CBA$
Durch Weglassen eines der Summanden ergibt sich die behauptete Ungleichung sofort.#

Satz:

In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.
Sind zwei Seiten gleich, sind die entsprechenden Winkel gleich.

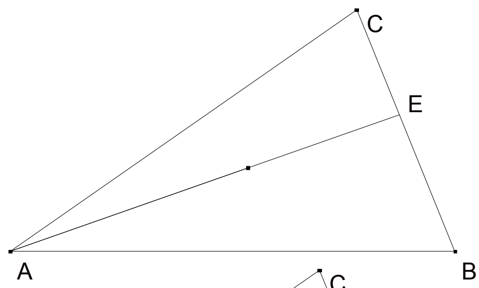


Beweis:

In ΔABC sei AC > BC; wir zeigen, dass dann $\beta > \alpha$ gilt.
Da AC > BC ist, können wir BC auf AC von C aus abtragen und es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ΔACP mit $\angle BPC = \angle PBC$.
$\alpha < \angle BPC$, da er Außenwinkel ist.
$\angle BPC = \angle PBC < \angle ABC = \beta$
$\Rightarrow \alpha < \beta$.#
Die Umkehrung folgt indirekt.
Sei $\alpha > \beta$ und $AC < BC \Rightarrow \alpha < \beta$, Widerspruch.#

Satz:

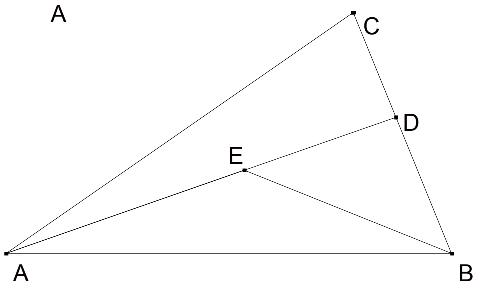
Gegeben ist ΔABC und Punkt E im Dreieck. Dann gilt $\angle ACB < \angle AEB$.



Beweis:

(a) E liegt auf einer Seite BC. $\angle AEB$ ist Außenwinkel zu ΔAEC, also gilt nach Außenwinkelsatz
$\angle ACE < \angle AEB$, also $\angle ACB < \angle AEB$.

(b) E liegt im Inneren. Die Verlängerung von AE schneide BC in D.
$\angle AEB$ ist Außenwinkel zu ΔBED, also gilt nach Außenwinkelsatz $\angle BDE < \angle AEB$, und wegen (a)
$\angle ACB < \angle ADB < \angle AEB$.#



Satz:

Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite.

Beweis:

Wir verlängern Seite AC und tragen darauf CD = CB ab.
Wir zeigen, dass AD > AB ist.
$\Delta\,BCD$ ist gleichschenklig.

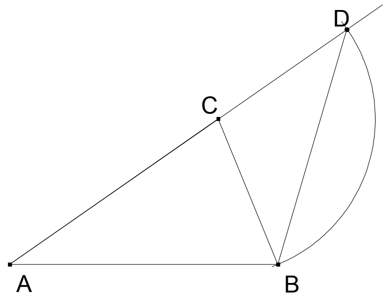
$\Rightarrow\ \angle\,CDB = \angle\,CBD = \angle\,ADB$

und $\angle\,ABD < \angle\,CBD$

$\Rightarrow\ \angle\,ABD > \angle\,ADB$

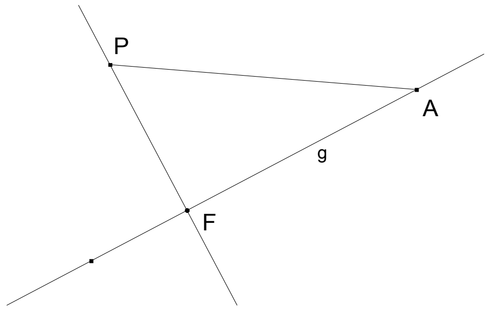
$\Rightarrow\ AD > AB$

$\Rightarrow\ AC + CD > AB.$#



C) kürzeste Abstände eines Punktes von Dreiecksseiten

Mit d(P,g) bezeichnen wir den Abstand des Punktes P von der Geraden g.



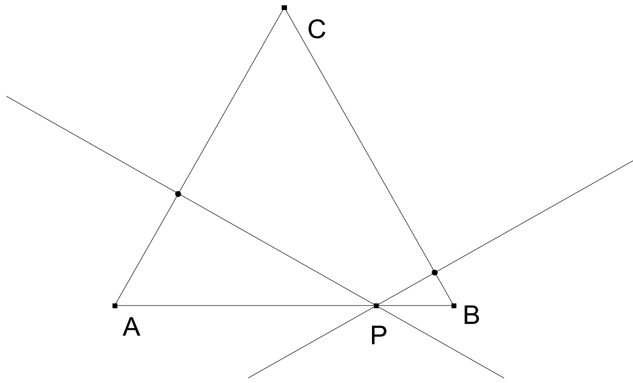
Satz:

Die kürzeste Entfernung von einem Punkt P zu einer Geraden g ist das Lot.

Beweis:

Δ AFP ist rechtwinklig, AP liegt dem rechten Winkel gegenüber, ist also die längste Seite.

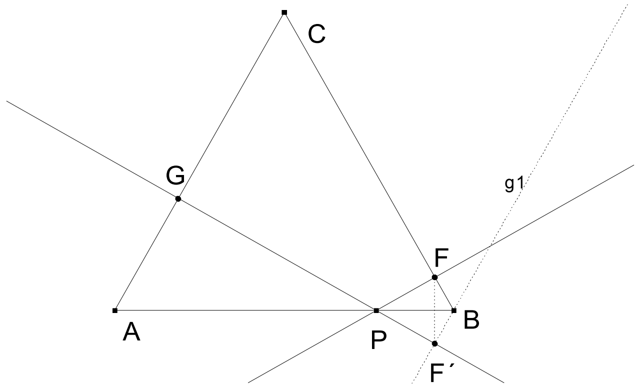
PF < PA für jede Lage von $A \in g$.#



Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit Basis AB und $P \in AB$.

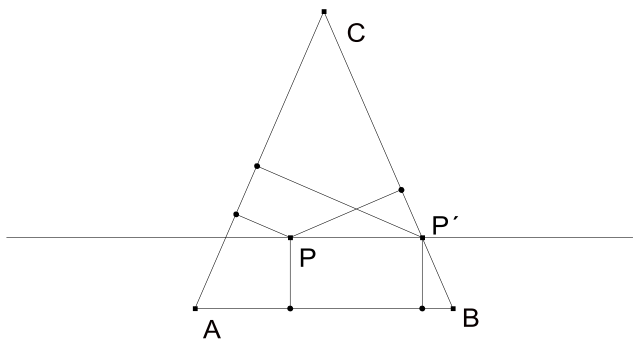
Für welche Lage von P nimmt d(P,AC) + d(P,BC) einen kleinsten oder größten Wert an?

Wir messen die Abstände in verschiedenen Lagen. Die Summen sind gleich! Wie kann man das nachweisen?



Woran erinnert die Figur?
Sind Eigenschaften zu erkennen, die wir bereits erforscht haben?
Einfall- und Ausfallwinkel erinnern an die Minimaleigenschaften der Reflexion.

Wir spiegeln F an AB.
Die Dreiecke ΔPBF und $\Delta PBF'$ sind kongruent (SWS).
$\angle PF'B = \angle PFB = 90^\circ$ wegen der Spiegelung.
F' liegt also auf einer Geraden g_1, die senkrecht zu $F'G$, also parallel zu AC verläuft.
GP + PF´ ist also konstant und es ist gleich der Höhe auf AC.

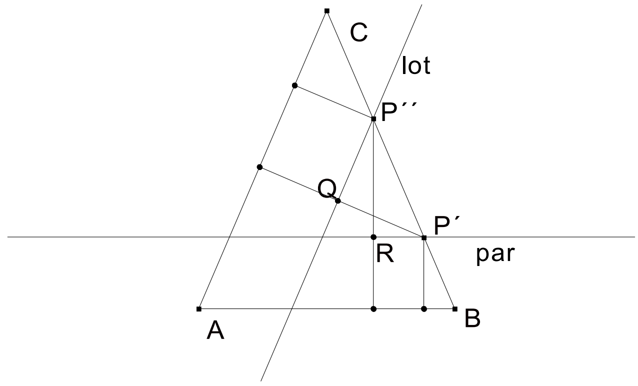


Der Abstand zu den Seiten wird kleiner, wenn P nicht an AB gebunden ist.
Gibt es im Inneren des ΔABC einen Punkt P mit minimaler Abstandssumme, die jetzt aber aus drei Summanden besteht?

Wir bemerken, dass man P auf einer Geraden g parallel zu AB verschieben kann ohne die Summe zu verändern.

Wir betrachten weiter P´ in verschiedenen Lagen und vergleichen die Abstandssumme, jetzt nur noch aus 2 Summanden.

Welcher der beiden Punkte P´ und P´´ hat die größere Abstandssumme?
Die Gerade lot schneidet P´Q senkrecht.
Wie verändert sich der Streckenzug bei Verschiebung des Punktes P´ nach P´´?
Er wird um P´Q kürzer und um P´´R länger.
Die Dreiecke $\Delta P'P''Q$ und $\Delta P'P''R$ sind rechtwinklig mit gemeinsamer Hypotenuse. Wie können wir die Katheten vergleichen?
Der Thaleskreis über $P'P''$ mit seinen Radien erzeugt gleichschenklige Dreiecke; die ermöglichen den Vergleich.



$\angle P''RM = \angle RP''M = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \angle P''MR = 180^\circ - \gamma$

$\angle QP''P' = \gamma \Rightarrow \angle P'QM = \angle QP'M = 90^\circ - \gamma$

$\Rightarrow \angle QMP' = 2\gamma$

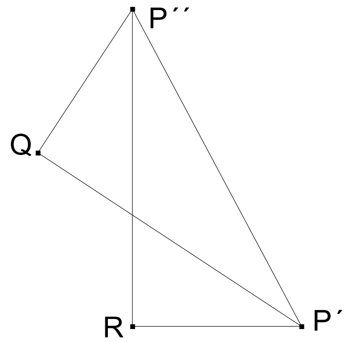
Wir unterscheiden drei Fälle:

(1)

$\gamma = 60^\circ \Rightarrow \angle QMP' = \angle P''MR$

$\Rightarrow QP' = P''R$

Die Abstandssumme bleibt konstant.

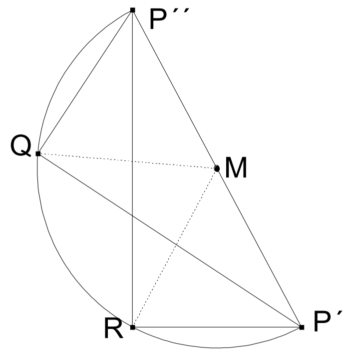


(2)

$\gamma < 60^\circ \Rightarrow \angle QMP' < 120^\circ < \angle P''MR$

$\Rightarrow QP' < P''R$

denn bei gleichen Schenkeln hat der kleinere Winkel in der Spitze die kleinere Basis zur Folge.
Die Abstandssumme wird kleiner, wenn P nach unten wandert, sie ist also minimal, wenn P auf AB liegt.



(3)

$\gamma > 60^\circ \Rightarrow \angle QMP' > 120^\circ > \angle P''MR$

$\Rightarrow QP' > P''R$

denn bei gleichen Schenkeln hat der größere Winkel in der Spitze die größere Basis zur Folge.
Die Abstandssumme wird kleiner, wenn P nach oben wandert, sie ist also minimal für P=C.#

Wir haben also bewiesen:

Satz:

> Ist in einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel in der Spitze kleiner als 60°, so ist die minimale Abstandssumme zu drei Seiten die Höhe auf einem Schenkel.
> Ist in einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel in der Spitze größer als 60°, so ist die minimale Abstandssumme zu drei Seiten die Höhe auf der Basis.

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass im gleichseitigen Dreieck die Abstandssumme zu drei Seiten konstant ist.

Literatur

- Quaisser/ Sprengel: Extrema,
  Harri Deutsch 1986
- Schupp, Hans: Optimieren,
  BI Wissenschaftsverlag 1992
- Baptist, Peter: Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie,
  BI Wissenschaftsverlag 1992
- Scriba/ Schreiber: 5000 Jahre Geometrie,
  Springer 2000
- Hajos, György: Einführung in die Geometrie,
  Teubner 1970
- Courant/ Robbins: Was ist Mathematik,
  Springer1967