Origami im Mathematikunterricht

Leitung des workshops: StDir. Michael Spielmann, Solingen

Die japanische Papierfaltkunst ORIGAMI ist vielen schon einmal begegnet. Wir kennen kunstvolle Blumen und Tiergebilde, die aus einem Blatt Papier durch Falten und Knicken entstehen. Oft wird das gesamte Kunstwerk aus einem einzigen Blatt erstellt.
Ich möchte hier das sogenannte modulare Origami vorstellen, bei dem Körper aus gleichartigen Modulen zusammengesetzt werden.

Die Fortbildung orientiert sich an dem Buch

DAVID MITCHELL: MATHEMATICAL ORIGAMI, TARQUIN PUBLICATIONS 2003

Das modulare Origami ist wegen seiner etwas geringeren Komplexität besser für ungeübte Hände geeignet. Wenn eine ganze Klasse Module faltet, hat man sehr schnell genügend Bauteile, um den entsprechenden Körper zusammenzusetzen. Einige wenige Körper-Modelle regen dann zum weiteren Bauen an.
Schüler haben heutigen Tags zunehmend Probleme mit der räumlichen Vorstellung geometrischer Gebilde. Platonische Körper aus Holz oder Kunststoff sind im Klassenraum oft nicht zur Hand; geometrische Bausätze wie Zometool oder Polydron sind teuer.
Wir wollen für den Mathematikunterricht Modelle platonischer Körper herstellen, die leicht zusammenzusetzen sind, ohne Kleber halten, auseinandergenommen leicht transportierbar sind, wegen des geringen finanziellen Aufwandes in großer Zahl erstellt werden können. Und die darüber hinaus den Vorteil haben, dass man sie nach Bedarf beschriften kann.

- Die platonischen **Standardkörper** Würfel, Tetraeder und Oktaeder sind nach den hier vorgestellten Mustern leicht nachzubauen. Ikosaeder und Dodekaeder sind wegen der großen Zahl an Modulen etwas komplizierter, leider auch nicht ganz so stabil.
- Aber auch **Skelettmodelle** (Spantenmodelle) von Oktaeder und Würfel sind lehrreich.
- Ein Würfel mit eingedrückter Ecke (**Kolumbus-Würfel**) eignet sich zur Beschreibung von Lagebeziehungen verschiedener Ebenen; für höhere Klassen regt er zur zeichnerischen oder rechnerischen Bestimmung von Winkeln im Raume an.
- **Schiefe Pyramiden** kann man zu größeren zusammenstellen. Das regt die geometrische Phantasie an.

Warum sollen Schüler Origami machen?
Sauberes Knicken und Falten sowie vorsichtiges Handhaben von glattem Papier verbessern die Feinmotorik. Das Herstellen eines Körpers ist ein kreatives Erlebnis. Schüler stellen gerne etwas her, was dann auch zu Unterrichtszwecken genutzt werden kann.
Will man nicht allein das Falt-Erlebnis vermitteln, sondern auch klassische geometrische Fragen an den erstellten Körpern beantworten, so zeigen sich die herkömmlichen Strategien des Geometrieunterrichts in neuem Licht. Kongruenz und Ähnlichkeit, Konstruktion und trigonometrische Rechnung sind aus der Problemstellung erwachsen, und sie gewinnen dadurch an Sinn und Bedeutung.
Die Kontrolle des Erfolges stellt sich recht schnell ein. Wenn ein nachlässig gefaltetes Modul den Gesamteindruck stört, wird man besser und genauer falten. Ein sauber zusammengesetztes Polyeder ist für die meisten Menschen ein ästhetisches Erlebnis. Ich habe bei allen meinen Klassen und auch in den Fortbildungsveranstaltungen mit Lehrern noch nie erlebt, dass ein Teilnehmer nicht zufrieden gelächelt oder sogar gestrahlt hätte, nachdem ihm mit seinem Nachbarn ein Polyeder gut gelungen ist.

Beobachtungen und Hinweise:
Origami-workshops habe ich bisher in den Klassen 5, 6, 8, 9 und 12 des Gymnasiums angeboten, also für Kinder im Alter zwischen 10 und 18 Jahren. Dies geschah im normalen Klassenunterricht, nicht als spezielle Unterrichtsreihe, sondern in einzelnen Stunden mit zeitlichem Abstand.
Daneben habe ich mit mathematisch besonders begabten Kindern workshops abgehalten, die einen Nachmittag dauerten. Dabei wurde dann das gesamte Programm nacheinander bearbeitet.

Schülern einer Klasse 10 war nicht ohne weiteres klar, dass die Kanten eines Oktaeders im Winkel von 45° zur Zwischenebene stehen, dass also sich abwechselnd treffende Kanten orthogonal zueinander stehen.

Jeder Schüler sollte jeden Körper mehrmals selbsttätig zusammensetzen.

Der erfahrene Lehrer wird zunächst zweifelnd fragen, wie soll ich denn 30 Schülern gleichzeitig die verschiedenen Schritte erklären. Man kann es, wenn die Schüler sich auf Stille einlassen. Für ein Modul braucht man nicht mehr als eine Viertelstunde; dann können die Schüler wieder ungeführt arbeiten. Der Lehrer sollte vielleicht das Modul aus weißem Papier an der Wandtafel falten, dann können die Schüler im optischen Kontrast ganz gut die Knicke und Falten erkennen.

Die Faltmuster der verschiedenen Polyeder sind in ihrer Größe nicht aufeinander abgestimmt. Es erfordert ein wenig geometrisches Überlegen, die Vorgabe so anzupassen, dass das Tetraeder und das Oktaeder zum Würfel passen. Dies aber ist bei einem ersten Zugang nicht notwendig, sondern erst dann, wenn man zeigen will, wie Oktaeder und Tetraeder aus dem Würfel entstehen können.

Sicher ist es unter urheberrechtlichem Aspekt nicht unproblematisch, Kopien der Vorlagen zu fertigen.

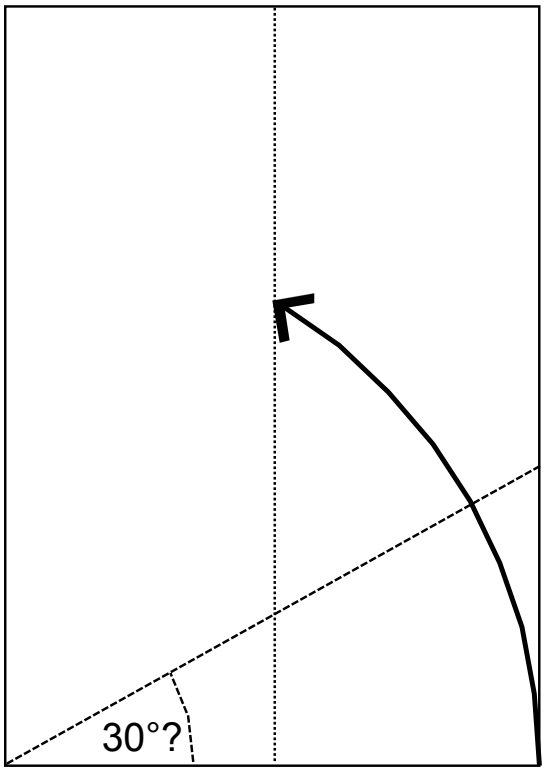
Günstige Reihenfolge:
Aus den vielen Beispielen des Buches von David Mitchell habe ich einige besonders geeignete ausgesucht.

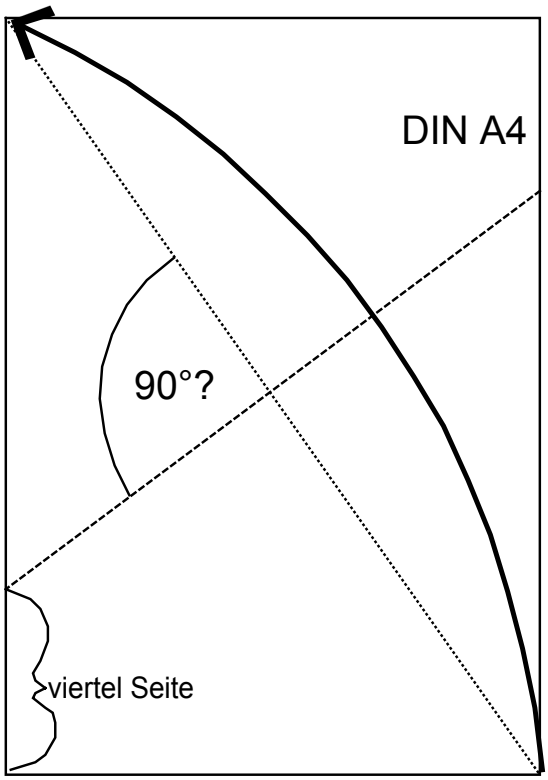
1. Würfel, Würfel mit eingedrückter Ecke (Kolumbuswürfel), Würfel-Turm, Würfel-Ring
2. Tetraeder
3. Oktaeder
4. Skelett Oktaeder
5. Ring aus Rhomben-Tetraedern

Der Ring aus Rhomben-Tetraedern hat zwar mit Polyedern nichts zu tun, ist aber ein interessantes Objekt, das allseits Staunen bewirkt. Sein Prinzip ist das eines Kaleidozyklus.

Zeitbedarf:
Nur für die Faltarbeiten allein muss man einen Zeitbedarf von jeweils 45 Minuten für 1., 2.+3., 4+5 kalkulieren.
Kommen die geometrischen Zusatzfragen hinzu, benötigt man für die Lösungen am Kolumbuswürfel nochmals etwa zweimal 45 Minuten.

Zusätzliche Fragen und Aufgaben:

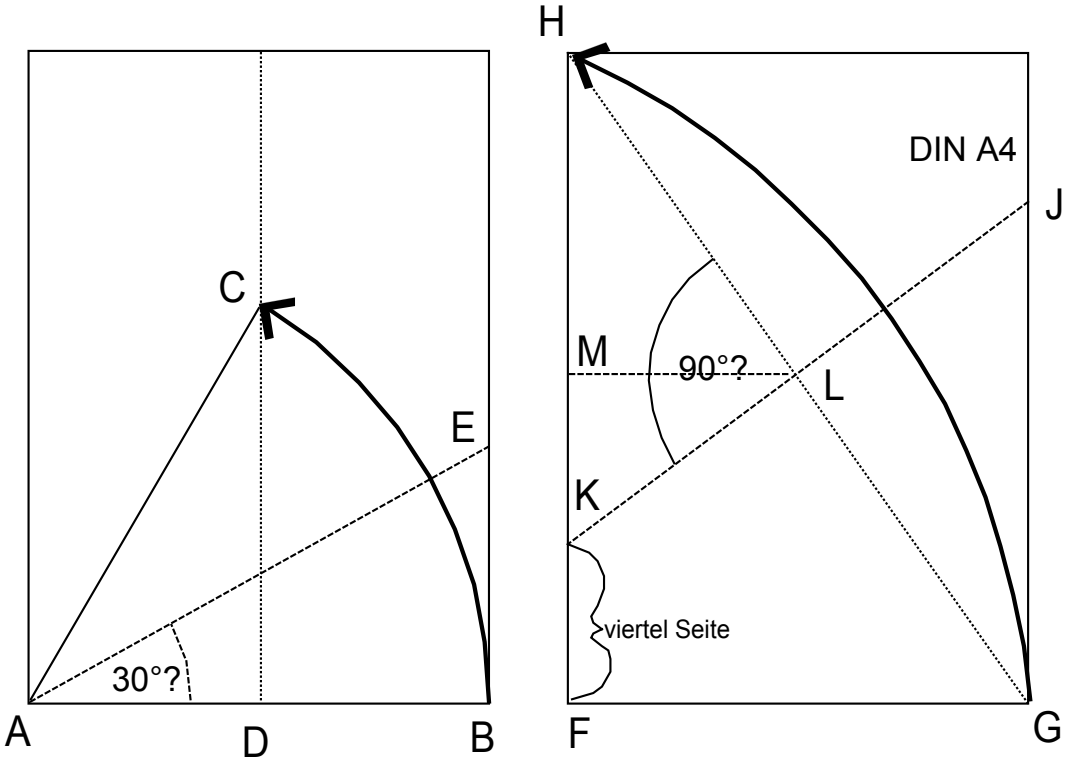




1. **Die Winkel entstanden durch Faltung. Begründe die Winkelgröße.**

2. **Begründe, dass die eine Rechteck-Seite geviertelt wird.**

Lösung der Aufgabe



zu 1.

$AB = AC \ (Spiegelung)$
$CA = CB \ (C\ auf\ Symmetrieachse)$
$\Rightarrow \Delta ABC\ gleichseitig$

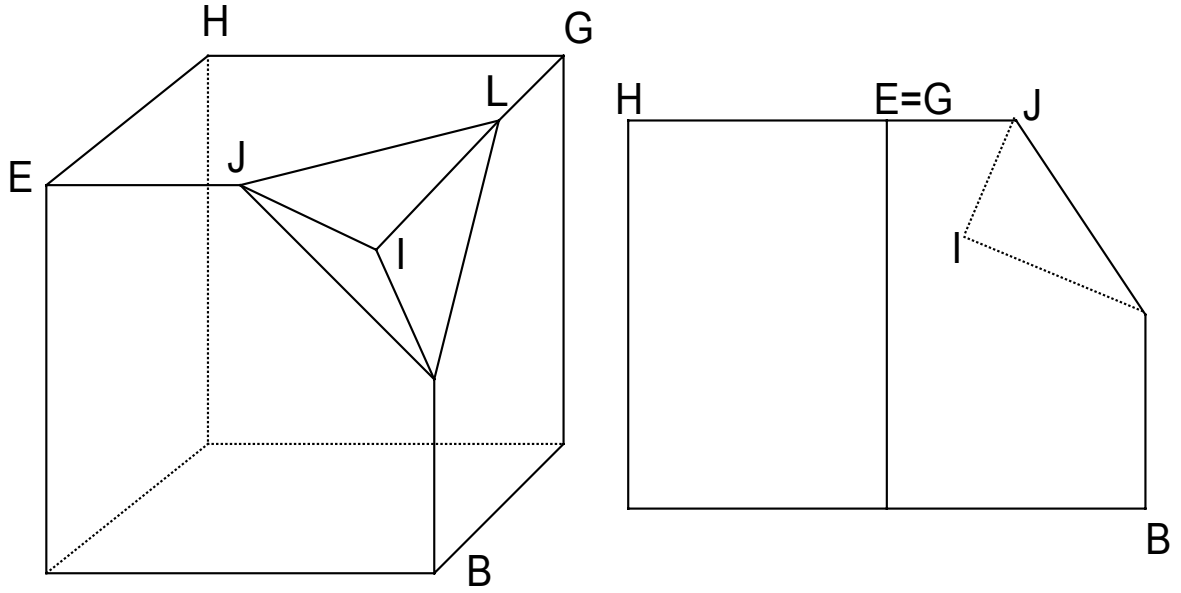
zu 2.

$H\ Spiegelpunkt\ von\ G\ an\ KJ$
$\Rightarrow \alpha = 90°$
$M\ Seitenmitte;$
$ML\ Höhe\ in\ \Delta HKL$
$\Rightarrow ML^2 = HM \cdot MK$
$\sqrt{2}ML = HM\ (DIN - Format)$
$\Rightarrow ML^2 = \frac{1}{2}HM$
$\Rightarrow MK = \frac{1}{2}HM \Rightarrow KF = \frac{1}{4}HF$

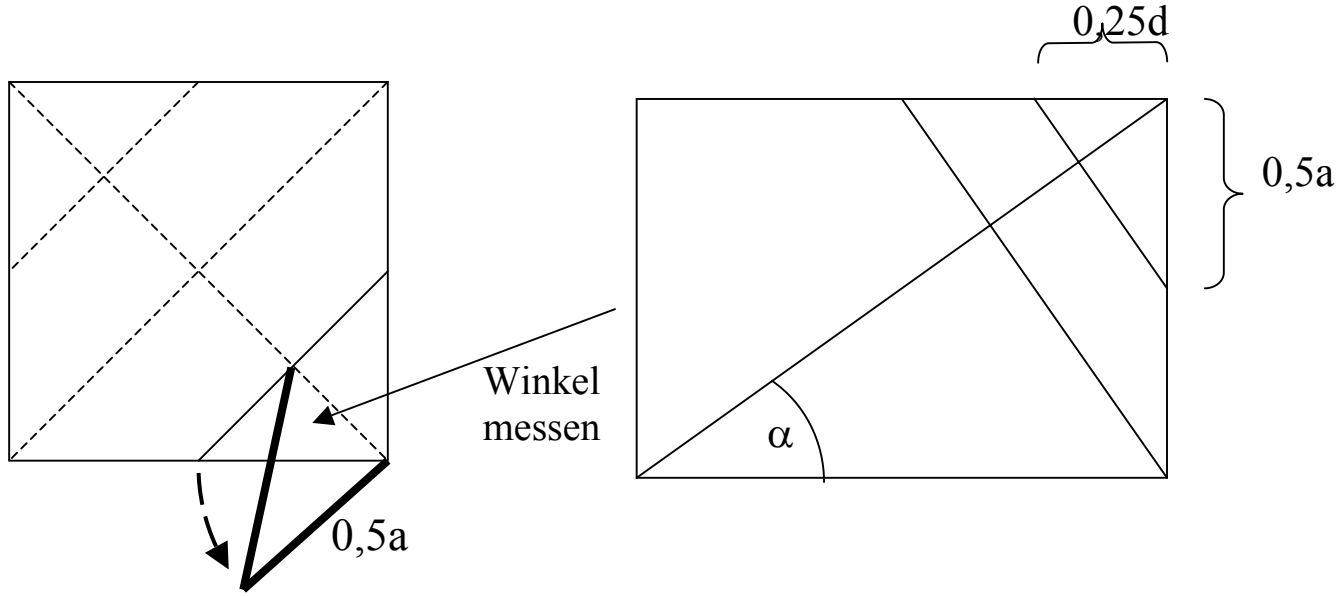
3. **Kolumbus-Würfel: In welchem Winkel stehen die nach innen gewandten Ecken zu den Seitenflächen?**
   Die Aufgabe kann zeichnerisch (Klasse 7) und rechnerisch (Klasse 10) gelöst werden.

4. **Begründe, dass der innere Punkt I auf der Raumdiagonale des Würfels liegt!**

5. **Wo genau liegt er auf der Raumdiagonale?**



Bei der Lösung der Aufgaben kann die Tatsache helfen, dass die nach innen gewandte Würfelecke vorher nach außen zeigte; ihre Form hat sich nicht geändert; sie wurde an der Dreiecksfläche gespiegelt.



Lösungshilfen:
JL teilt die Flächendiagonale HF in 1:4.
Die Flächendiagonale d kann zeichnerisch ermittelt werden.
Rechnerisch bestimmt man die Winkel über tangens zu 54,7° oder 35,3° beziehungsweise 109,5° oder 70,5°.
Mit Strahlensatz weisen wir nach, dass I auf einem Drittel der Raumdiagonale liegt.

Man kann mehrere Kolumbuswürfel stapeln. Ab 5 Würfeln wird der Turm instabil. Die meisten Personen, die einen Kolumbuswürfel auf die Spitze eines anderen Kolumbuswürfels setzen wollen, platzieren ihn falsch; man muss durch Drehung nachbessern.

Noch schöner ist die Zusammenstellung zu einem Ring.

6. **Passen die 5 Würfel exakt zu einem Ring zusammen?**

Nein; der nächste Würfel ist in seiner Position um 70,5° gedreht; das ergibt eine Differenz von 1,5°, die im Modell nicht auffällt.

7. **Wie muss man die Module falten, damit raumdiagonal entgegengesetzte Ecken eingeknickt sind?**

Im Sinne einer eindeutigen Beschreibung ist es zunächst wichtig, die Position der Faltung zu kennzeichnen. Für den Kolumbuswürfel haben wir die linke obere Ecke des Würfelmoduls eingedrückt. Wir betrachten im weiteren das U-förmige Modul von innen. Beim Zusammenbau liegt das untere Modul quer vor dem Schüler.
Die Schüler sollten sich in der räumlichen Vorstellung klarmachen, wie die drei Module der Kolumbus-Ecke zueinander liegen; sie erkennen dann, warum es notwendig war, bei drei Modulen links oben zu knicken. Dann werden sie vielleicht spontan antworten, die entgegengesetzt liegende Ecke verlangt dieselbe Faltung, da sie in gedrehter Position liegt. Will man die Position der Ecke durch Drehung erreichen, ändert sich aber die Lage des Moduls um 90°; die gewählte Art der Beschreibung passt also nicht mehr. Man erreicht das

gewünschte Ziel, wenn man spiegelt, also die rechte obere Ecke des Moduls knickt. Bei diesen beiden Kolumbusecken wurde auf jedem Modul eine einzige Ecke geknickt; links oben knicken ist also das gleiche wie rechts unten knicken, und rechts oben ist das gleich wie links unten.

8. Wie muss man falten, damit benachbarte Würfelecken eingeknickt sind?

Jetzt ist es nicht mehr egal, ob man links unten oder rechts oben knickt, da bei einem Modul zwei Ecken geknickt werden. Die erste Kolumbusecke soll links unten hinten im Würfel liegen. Wir wollen die Ecke rechts unten hinten zusätzlich eindrücken. Dann wird das untere Modul zweimal geknickt, nämlich links oben und rechts oben. Das hintere Modul wird zweimal geknickt, nämlich links oben und links unten. Das rechte Modul wird einmal geknickt, nämlich links unten. Auch dieses sollten sich die Schüler möglichst überlegen bevor sie falten. Sicher führt auch die Methode Versuch-und-Irrtum zum Ziel.

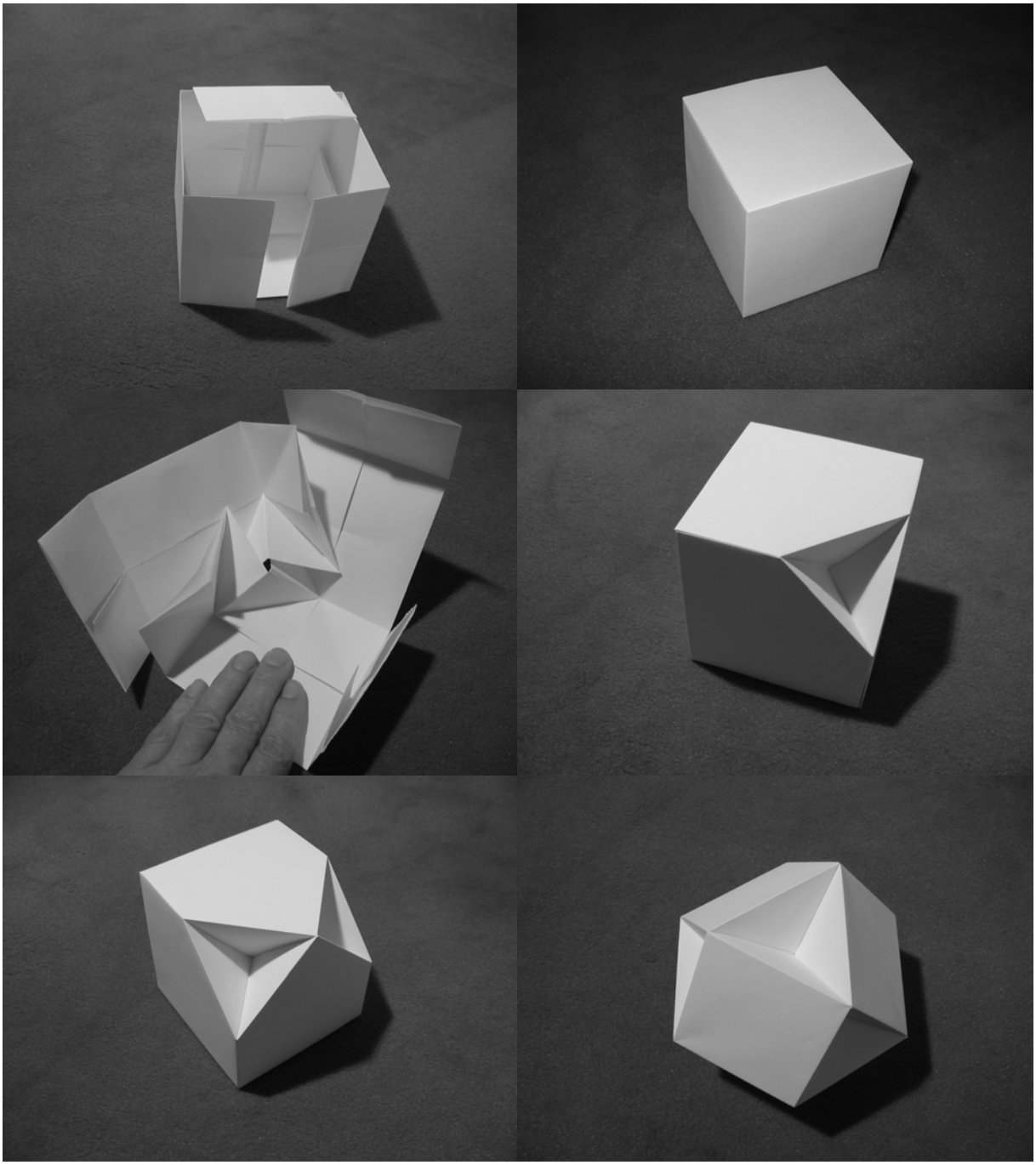
9. Das Eindrücken aller 8 Ecken führt zu einem Kuboktaeder.

Das Kuboktaeder ist nicht leicht zusammenzusetzen. Bei der Montage des letzten Moduls empfiehlt sich ein langer Bleistift als Hilfe. Günstig ist der Zusammenbau in der Reihenfolge: die Module unten, links, hinten bilden die erste Ecke; jetzt denke man über die Lage der weiteren Module einen Moment nach, damit die Raumbeziehung klarer wird. Die vielen Zacken des Moduls behindern die Übersicht. Dann fügt man reihum die Module rechts und vorne ein; zum Schluss das Modul oben; es bereitet Probleme, weil die Ecken schon sehr stabil ineinandergreifen.
Wenn das Kuboktaeder fertig ist, geht von ihm eine überaus starke Wirkung aus. Die Schüler sollten es aus verschiedenen Positionen betrachten. Stellt man es auf eine der dreieckigen Flächen, scheint es mit einem Würfel nichts mehr gemeinsam zu haben. Die Schüler sollten sich klarmachen, wie es aus dem Würfel entstanden ist.

10. Vier Tetraeder und ein Oktaeder lassen sich zu einem großen Tetraeder kombinieren.

Die Module des Tetraeders und des Oktaeders sind nach dem Vorschlag von Mitchell identisch. Es empfiehlt sich daher, die beiden Körper im Zusammenhang zu betrachten.
Das große Tetraeder ist nicht schwer herzustellen.
Vielleicht sollte man die Schüler vorher fragen, welche Form der Restkörper hat, wenn man mit einem Schnitt über die Kantenmitten dem Tetraeder die vier Spitzen abschneidet. Ich habe festgestellt, dass viele Schüler mit dieser Aufgabe nicht gut zurechtkommen. Ja sogar, wenn man zuerst das große Tetraeder gebaut hat, sind einige Schüler nicht dazu imstande, im Umkehrschluss die Form des Restkörpers zu erkennen. Sie müssen das große Tetraeder ganz bewusst zerlegen.

Hier einige Bilder zum Werdegang der Körper.

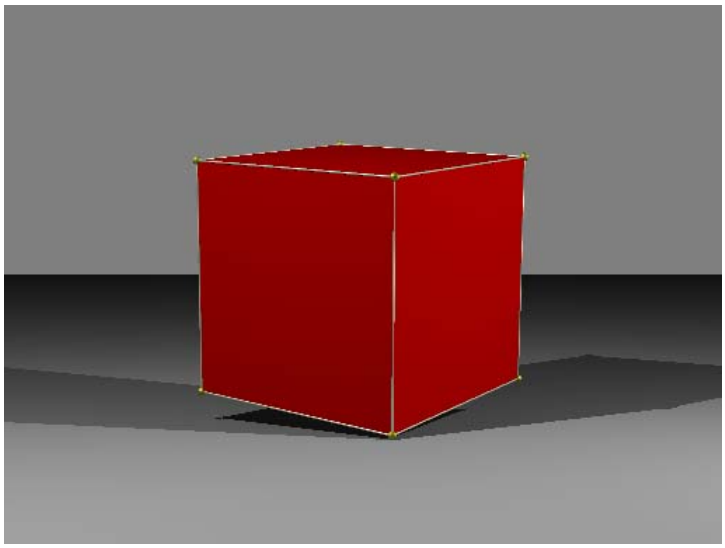


Anhang

Wie wirkt ein Würfel? Ästhetik und Raum-Empfinden

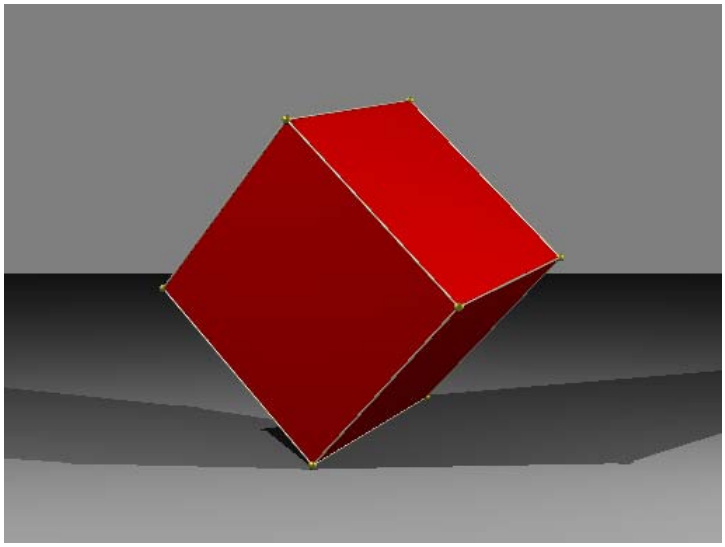
Diese Frage ist nur scheinbar sinnlos. Wir stellen uns einen Würfel üblicherweise in der Position vor, dass er auf einer Seitenfläche liegt. Wir sind es gewöhnt, ihn nach einem Wurf in dieser Lage vorzufinden, und so zeichnen wir ihn auch im Schrägbild. Eine dynamische Auffassung des Körpers lässt andere Lagen zu.

Außer der eben beschriebenen möchte ich zwei weitere in den Blick nehmen.



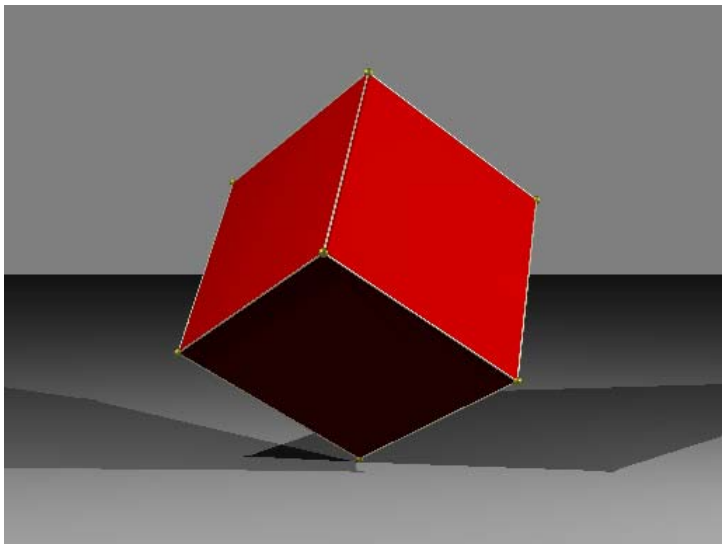
Der auf der Fläche lastende Körper wird auf eine Kante gekippt.

Ein labiler Zustand entsteht, der für den Körper zwei Bewegungsrichtungen zulässt.



Eine das räumliche Umfeld einbeziehende Auffassung könnte den Zustand mit Schwimmen in einer Flüssigkeit assoziieren.

Nun bewegen wir den Körper von der Kantenlage so, dass er auf einer Spitze steht. Seine Lage ist jetzt in jeder Hinsicht instabil, er kann in alle Richtungen umfallen. Da er sich aber dennoch hält, macht er einen schwebenden Eindruck.



Fassen wir den Würfel mit beiden Händen an den raumdiagonal entgegengesetzten Ecken und drehen ihn, fällt der „Äquator“, die gezackte „Taille“ ins Auge. Diese Linie wird von 6 Würfelkanten gebildet, die in ihrer Regelmäßigkeit den Würfel in Oben und Unten teilen. An einer Ecke stoßen je drei Flächen aneinander; sie bilden einen Oktanten, die räumliche Ecke eines dreidimensionalen Systems. Wir können uns auch vorstellen, dass der Würfel aus zwei solchen Raum-Ecken zusammengesetzt ist.

Literatur:

3-D Geometric Origami
Rona Gurkewitz, u. a. Dover Publications (1996)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 6,49**

Multimodular Origami Polyhedra: Archimedeans, Buckyballs and Duality
Rona Gurkewitz, Bennett Arnstein Dover Publications (2003)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 7,49**

A Plethora of Polyhedra in Origami
John Montroll, Montroll Dover Publications (2002)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 11,95**

Mathematical Origami
David Mitchell Tarquin Publications (1997)
Taschenbuch / Sprache Englisch **EUR 8,49**

Origami figürlich und geometrisch
Kunihiko Kasahara Augustus Verlag im Weltbild (2000)
Gebundene Ausgabe vergriffen, antiquarisch etwa **EUR 11,00**

Internet:

http://www.viereck-verlag.de/origami.html (zur Historie)
http://www.papierfalten.de/de/ (homepage von Origami Deutschland)
http://www.mizushobai.freeserve.co.uk/ (homepage von David Mitchell)
http://theory.lcs.mit.edu/~edemaine/ (homepage von Eric Demaine)