Geometrie in Klasse 8
Eine Unterrichtseinheit zu Flächenberechnung und Mittenlinien

Michael Spielmann

April 2006

Zusammenfassung

Ausgehend vom Prinzip der Flächenzerlegung werden die Formeln für die Fläche des Parallelogramms und des Dreiecks erarbeitet. Unter Beachtung der funktionalen Abhängigkeit der drei Variablen Grundseite, Höhe, Fläche werden zentrale Sätze rund um die Mittentransversalen hergeleitet. Gleichzeitig werden die Strahlensätze vorbereitet.

Als didaktisch-methodische Prinzipien sind im Wechsel Gruppenarbeit, Plenumsdiskussion und Einzelarbeit vorgesehen. Durch Einsatz dynamischer Geometrie-Software wird der Erkenntnisprozeß beschleunigt und vertieft.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **2**

2 die zentralen Sätze **2**

3 die Fläche des Parallellogramms **3**

4 die Fläche des Dreiecks **4**

5 die funktionale Abhängigkeit **5**

6 die Mittentransversalen im Parallellogramm **5**

7 die Mittentransversalen im Dreieck **7**

8 der Schwerpunkt **9**

9 die Strahlensätze **10**

10 Kopiervorlagen für Schüleraktivitäten **12**

11 zusätzliche Übungsaufgaben **19**

12 Lernerfolgskontrolle **21**

13 Lösungen der Aktivitäten 1 bis 7 **22**

14 Lösungen der zusätzlichen Übungsaufgaben 8 bis 18 **22**

15 Lösungen der Testaufgaben 1 bis 4 **23**

16 Verteilung auf die Unterrichtsstunden **24**

1 Vorwort

Die gängigen Schulbücher zur GEOMETRIE in Klasse 8 lassen eine vertiefte Sicht der theoretischen und argumentativen Zusammenhänge geometrischer Fragen vermissen. In der vorliegenden Ausarbeitung wird eine Unterrichtssequenz präsentiert, in der ausgehend von der Flächenformel für Parallelogramm und Dreieck einige zentrale Sätze über Seitenhalbierende nachgewiesen werden.

Das vorliegende Skript ist gegliedert in vier Teile: der erste enthält den fachsystematischen Aufbau mit Beweisen und Argumentationen für die Hand des Lehrers. Der zweite enthält die Arbeitsblätter für die Schüler, hier Aktivitäten genannt. Der dritte enthält zusätzliche Aufgaben, die als Hausaufgaben gedacht sind. Abschließend ist eine tabellarische Übersicht zum zeitlichen Ablauf angefügt.

2 die zentralen Sätze

- Die Fläche des Parallelogramms ist das Produkt aus Grundseite und Höhe. (Satz 1)
- Die Fläche des Dreiecks ist das halbe Produkt aus Grundseite und Höhe. (Satz 2)
- Die Fläche ist eine Funktion der Grundseite und der Höhe.
  - Verdoppelt man die Höhe bei gleicher Grundseite, so verdoppelt sich die Fläche.
  - Verdoppelt man die Grundseite bei gleicher Höhe, so verdoppelt sich die Fläche.
  - Verdoppelt man die Fläche bei gleicher Höhe, so verdoppelt sich die Grundseite.
  - Verdoppelt man die Fläche bei gleicher Grundseite, so verdoppelt sich die Höhe.
- Die Teilflächen durch Mittentransversalen im Parallelogramm sind gleichgroß.

 © 2006

- Die Teilflächen durch Mittentransversalen im Dreieck sind gleichgroß.
- Die Verbindung zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel zur gegenüberliegenden Seite. (Satz 3)
- Die Parallele zu einer Seite durch die Mitte einer anderen Seite halbiert auch die dritte Seite. (Satz 4)
- Wenn eine Parallelenschar von zwei Geraden geschnitten wird, ist das Teilungsverhältnis auf der einen Geraden gleich dem Teilungsverhältnis auf der anderen Geraden. (Satz 5)
- Die Verbindung der Seitenmitten ist halb so lang wie die gegenüberliegende Seite. (Satz 6)
- Die Seitenhalbierenden teilen einander im Verhältnis 2:1. (Satz 7)
- Die Seitenhalbierenden schneiden einander in einem einzigen Punkt, dem Schwerpunkt des Dreicks. (Satz 8)
- Die Seitenhalbierenden erzeugen sechs flächengleiche Teildreiecke. (Satz 9)

3 die Fläche des Parallellogramms

Wir haben gelernt, wie man die Flächen von Rechtecken bestimmen kann. Nun ist aber nicht jedes Viereck ein Rechteck. Wie sollen wir die Fläche eines Parallelogramms bestimmen?

Aufgabe 1 *Schneide das Parallelogramm aus; zerschneide es so, dass Du die Teile als Rechteck zusammenlegen kannst. (Arbeitsblatt Seite 12)*

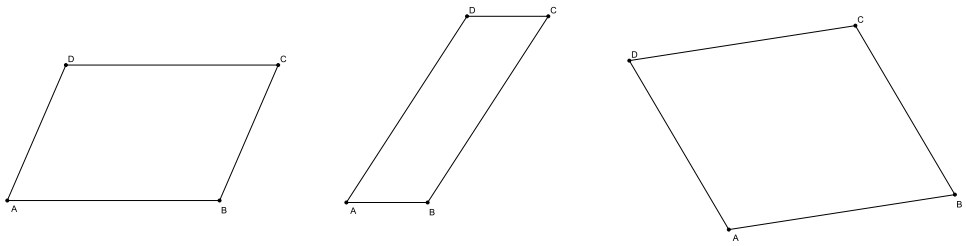


Abbildung 1: Parallelogramm zerlegen

Jedes Parallelogramm kann man durch Zerlegung oder Ergänzung in ein flächengleiches Rechteck verwandeln. Wenn man den Abstand der Parallelen als Höhe bezeichnet, erhält man

Satz 1 *Die Fläche des Parallelogramms ist das Produkt aus Grundseite und Höhe.*

 © 2006

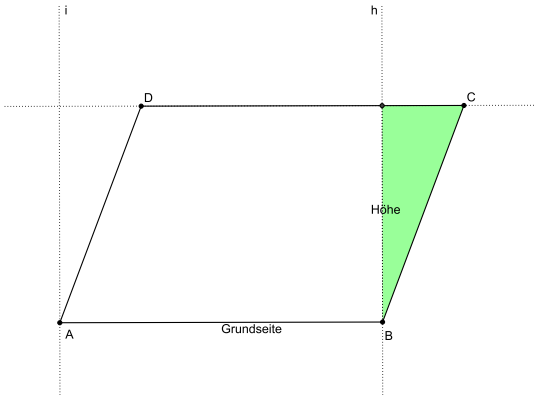


Abbildung 2: Parallelogramm wird Rechteck

und die Formel

$$F_{Parallelogramm} = g \cdot h$$

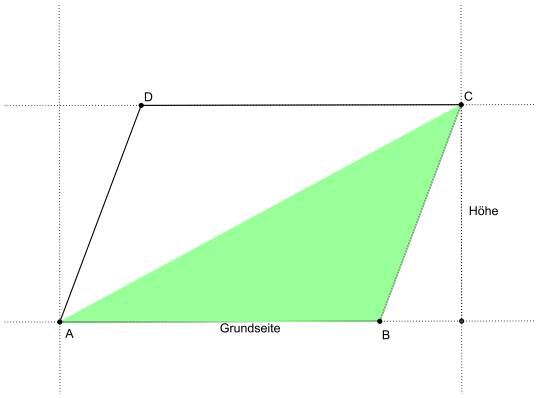


Abbildung 3: halbes Parallelogramm ist Dreieck

4 die Fläche des Dreiecks

Die Diagonale des Parallelogramms erzeugt zwei Dreiecke. Sie halbiert den Flächeninhalt. Der Satz wird begründet mit den Kongruenzsätzen. So können wir jetzt auch die Fläche eines Dreiecks bestimmen. Jedes Dreieck ist durch Zerlegung und Ergänzung in ein halbes Parallelogramm zu verwandeln.

Satz 2 *Die Fläche des Dreiecks ist das halbe Produkt aus Grundseite und Höhe.*

Die Flächenformel ist daher

$$F_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

 © 2006

Jedes Parallelogramm hat zwei Höhen. Die Höhe steht immer senkrecht zur gewählten Grundseite. Jedes Dreieck hat drei Höhen. Bei spitzwinkligen Dreiecken liegen die Höhen innerhalb des Dreicks, bei stumpfwinkligen Dreiecken liegen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks, bei rechtwinkligen Dreiecken kann jede der Katheten als Höhe gesehen werden. Die Lage der Höhen zu erkennen, ihre Auswahl zu vorgegebener Grundseite, das Messen und das Berechnen der Flächen muss geübt werden.

Aufgabe 2 *Zeichne alle Höhen des Parallelogramms ein. Bestimme durch Messen die Flächen auf zwei Arten. (Arbeitsblatt Seite 13)*

Aufgabe 3 *Erweitere das Dreieck zum Parallelogramm. (Arbeitsblatt Seite 14)*

Aufgabe 4 *Zeichne alle Höhen des Dreiecks ein. Bestimme durch Messen die Flächen auf zwei Arten. (Arbeitsblatt Seite 15)*

Eine schöne Übung ist die Aufgabe, die Trapezformel eigenständig herzuleiten.

Aufgabe 5 *Wenn Du verstanden hast, warum die Flächenformeln für das Parallelogramm $F = g \cdot h$ und für das Dreieck $F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ lauten, dann kannst Du sicher auch eine Formel für die Fläche eines Trapezes aufstellen. (Arbeitsblatt Seite 16)*

5 die funktionale Abhängigkeit

Bei konstanter Grundseite ist die Fläche proportional zur Höhe. Bei konstanter Höhe ist die Fläche proportional zur Grundseite. Die k-fache Höhe erzeugt bei gleicher Grundseite die k-fache Fläche.

Dies kann man anhand der Formeln bestätigen.

$$F = \frac{1}{2}gh$$

$$h' = k \cdot h$$

$$\Rightarrow F' = \frac{1}{2}gh' = \frac{1}{2}g \cdot kh = k \cdot \frac{1}{2}gh = k \cdot F$$

Die Schüler können mit mehreren Beispielen zu dieser Erkenntnis gebracht werden; leichter allerdings wird es ihnen mittels eines dynamischen Geometrie-Programmes gemacht.

Aufgabe 6 *Verändere die Grundseite eines gegebenen Dreicks. Wie wirkt sich das auf die Fläche aus? (Arbeitsblatt Seite 17)*

6 die Mittentransversalen im Parallellogramm

Aufgabe 7 *Von einer Ecke A des Rechtecks ausgehend werden die Mittentransversalen und die Diagonale gezeichnet. (Arbeitsblatt Seite 18)*

 © 2006

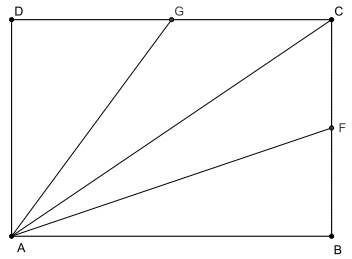


Abbildung 4: Transversalen im Rechteck

Dadurch entstehen vier flächengleiche Dreiecke.

Aufgabe 8 *Was ändert sich an der Situation, wenn das Rechteck ein schiefwinkliges Parallelogramm ist? (Skizze siehe Abb. 5 Seite 6)*

Abbildung 5: Transversalen im Parallelogramm

Wir argumentieren allgemein für das Parallelogramm. Die Diagonale halbiert die Parallelogrammfläche. Betrachtet man das Teildreieck ACD, so sieht man folgendes:

Dreieck ACG ist halb so groß wie Dreieck ACD, da die Grundseite halbiert wurde, die Höhe aber gleich ist.

Das gleiche Argument gilt für Dreieck AFC. Die vier Dreiecke haben daher den Flächeninhalt ein Viertel der Parallelogrammfläche.

Aufgabe 9 *Von der Ecke D des Parallelogramms wird zusätzlich die zweite Diagonale gezeichnet. Sie schneidet die erste in M. Es ist bekannt, dass M die Diagonalen halbiert. Zu zeigen ist, dass M auf derselben Höhe wie die Seitenmitte F liegt.*

$$F_{ABM} = F_{ABF} = \frac{1}{4} F_{ABCD} \wedge AB \text{ ist gemeinsame Grundseite}$$

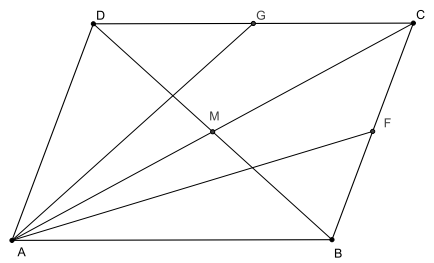


Abbildung 6: Diagonalenschnitt

$$\Rightarrow \triangle ABM \text{ und } \triangle ABF \text{ haben dieselbe Höhe}$$

M liegt daher auf derselben Höhe wie F, MF ist parallel zu AB.

7 die Mittentransversalen im Dreieck

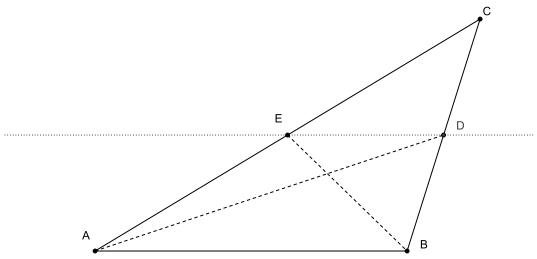


Abbildung 7: Mittenlinie parallel

Da die Argumentation unabhängig vom speziellen Parallelogramm ABCD ist, gilt die Aussage für jeden Zweistrahl. Also gilt auch in jedem Dreieck:

Satz 3 *Die Verbindung der Seitenmitten ist parallel zur Gegenseite.*

Umgekehrt gilt auch:

Satz 4 *Die Parallele durch den Mittelpunkt einer Seite halbiert die andere Seite.*

$AE = \frac{1}{2}AC$ (halbe Grundseite) $\wedge$ gleiche Höhe auf AC $\Rightarrow F_{ABE} = \frac{1}{2}F_{ABC}$

AB Grundseite von $\triangle ABD$ und $\triangle ABE \wedge$ gleiche Höhe auf AB $\Rightarrow F_{ABD} = F_{ABE}$

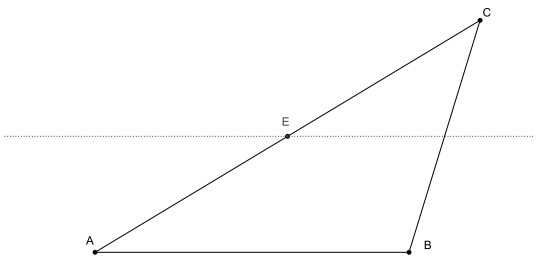


Abbildung 8: Mitte wird übertragen

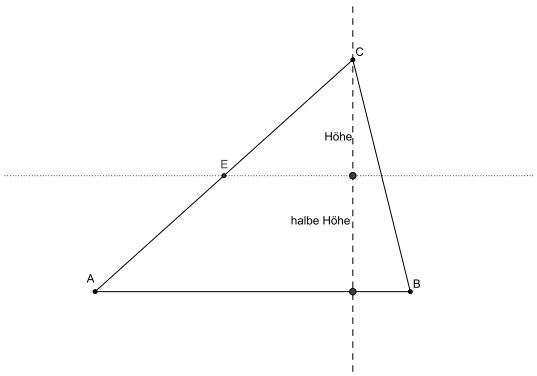


Abbildung 9: Höhe wird halbiert

$$\Rightarrow F_{ABD} = \frac{1}{2} F_{ABC}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} BC \text{ wegen gleicher Höhe auf Grundseite BD und BC}$$

D ist also Seitenmitte.

Über die Lage von BC zu AB haben wir nichts vorausgesetzt; sie kann orthogonal sein. Daher wird auch die Höhe durch ED halbiert.

Mit den erarbeiteten Hilfssätzen können wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 5 *Wenn eine Parallelenschar von zwei Geraden geschnitten wird, ist das Teilungsverhältnis auf der einen Geraden gleich dem Teilungsverhältnis auf der anderen Geraden.*

Da die Verbindungen der Seitenmitten parallel zu den Seiten liegen, entstehen innerhalb des Dreicks Parallelogramme. ED ist also so lang wie AF und wie FB. Es gilt also der

Satz 6 *Die Mittenlinien des Dreiecks sind halb so lang wie die parallelen Seiten.*

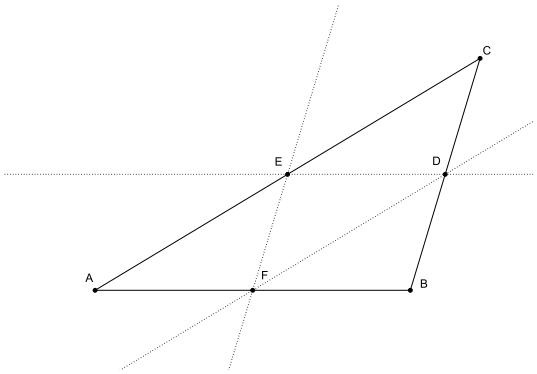


Abbildung 10: Mittenlinien gleich halber Seite

Die vier durch die Mittenlinien entstehenden Teildreiecke haben als Fläche ein Viertel der Gesamtfläche. Das ist mit Kongruenzsätzen schon früher begründet worden. Richten wir hier den Blick auf das Zusammenspiel von Höhe und Grundseite, so formulieren wir: Bei halber Höhe und halber Grundseite wird die Fläche geviertelt.

8 der Schwerpunkt

Satz 7 *Die Seitenhalbierenden AD und BE schneiden sich in S. S teilt AD im Verhältnis 2:1.*

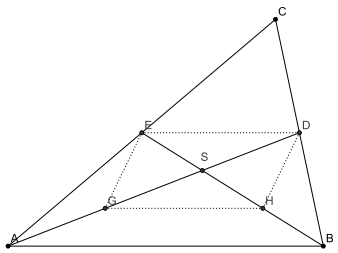


Abbildung 11: Teilung (2):(1)

Wir fügen G als Mitte von AS und H als Mitte von BS hinzu. Da D und E Seitenmitten im Deieck ABC sind, ist ED parallel zu AB und halb so lang wie AB; dasselbe gilt für GH in Dreieck ABS. GH und ED sind also parallel und gleichlang. DEGH ist daher ein Parallelogramm. S halbiert die Diagonale GD; also ist GS=SD. Da G Mitte von AS ist, gilt insgesamt AG=GS=SD. S teilt also die Strecke AD in 2:1.

Die Argumentation gilt für je zwei Seitenhalbierende. Da S durch das Teilver-

hältnis eindeutig ist, muss er auf allen drei Seitenhalbierenden derselbe Punkt sein. Wir haben gerade bewiesen

Satz 8 *Die Seitenhalbierenden schneiden einander in einem einzigen Punkt. Dies ist der Schwerpunkt.*

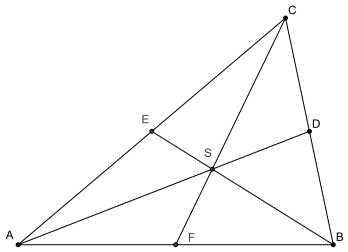


Abbildung 12: Schwerpunkt

Satz 9 *Die Seitenhalbierenden des Dreiecks erzeugen sechs flächengleiche Teildreiecke.*

Da F Seitenmitte ist, sind AFS und FBS flächengleich.
Da E Seitenmitte ist, sind EAS und CES flächengleich.
Da D Seitenmitte ist, sind BDS und DCS flächengleich.
Da DE parallel AB ist, sind ABD und ABE flächengleich; sie haben ABS gemeinsam; also sind auch ASE und BSD flächengleich (Schmetterling).
Daher sind alle sechs Teildreiecke gleichgroß.

Das können wir auch mit der 2:1-Teilung begründen. In $\triangle ABD$ ist SD die Hälfte von AD; wegen gleicher Höhe ist also DSB die Hälfte von SAB. Da AFS=FBS ist, sind die drei Teildreicke flächengleich. Dies gilt für jede Seitenhalbierende, also auch in Dreieck FBC oder DCA. Daher sind alle sechs Teildreiecke gleichgroß.

9 die Strahlensätze

In Satz 4 beziehungsweise Satz 5 haben wir gezeigt, dass durch eine Parallelenschar das Teilverhältnis von einem auf den anderen Strahl übertragen wird. Der erste Strahlensatz ist also sofort klar.

Satz 10 *Wird ein Zweistrahl von Parallelen geschnitten, so ist das Verhältnis entsprechender Strecken auf den Strahlen gleich.*

Der zweite Strahlensatz, der das Verhältnis der Parallelenabschnitte betrachtet, kann mit der Flächenformel des Trapezes bewiesen werden.

 © 2006

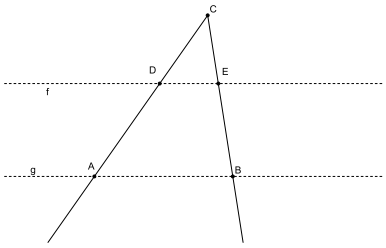


Abbildung 13: 1.Strahlensatz

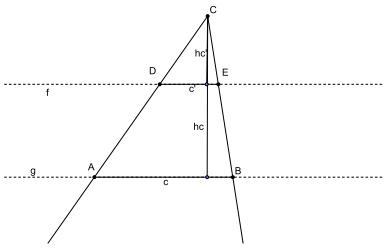


Abbildung 14: 2.Strahlensatz

Satz 11 *Wird ein Zweistrahl von Parallelen geschnitten, so ist das Verhältnis der Parallelenabschnitte gleich dem Verhältnis entsprechender Scheitelabschnitte auf den Strahlen gleich.*

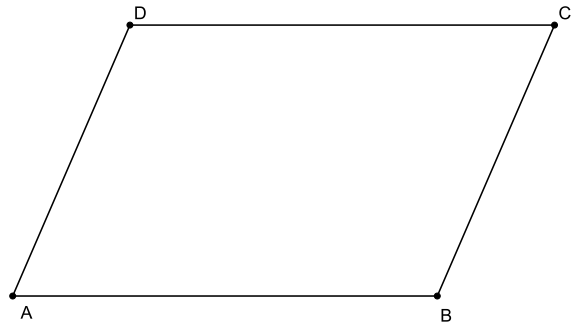
Beweis:

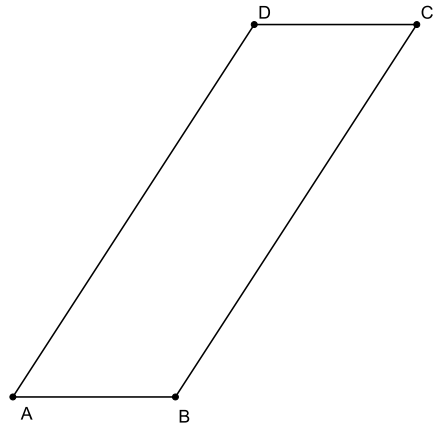
$$\begin{aligned}
F_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \\
F_{DEC} &= \frac{1}{2} \cdot c' \cdot h'_c \\
F_{ABDE} &= \frac{1}{2}(c + c') \cdot (h_c - h'_c) \\
&= \frac{1}{2}(c \cdot h_c + c' \cdot h_c - c \cdot h'_c - c' \cdot h'_c) \\
&= \frac{1}{2}(c \cdot h_c - c' \cdot h'_c) + \frac{1}{2}(c' \cdot h_c - c \cdot h'_c) \\
&= F_{ABC} - F_{DEC} + \frac{1}{2}(c' \cdot h_c - c \cdot h'_c) \\
\text{also muss sein } \frac{1}{2}(c' \cdot h_c - c \cdot h'_c) &= 0 \\
\Rightarrow c' \cdot h_c - c \cdot h'_c &= 0 \\
\Rightarrow c' \cdot h_c &= c \cdot h'_c \\
\Rightarrow \frac{c'}{c} &= \frac{h'_c}{h_c}
\end{aligned}$$

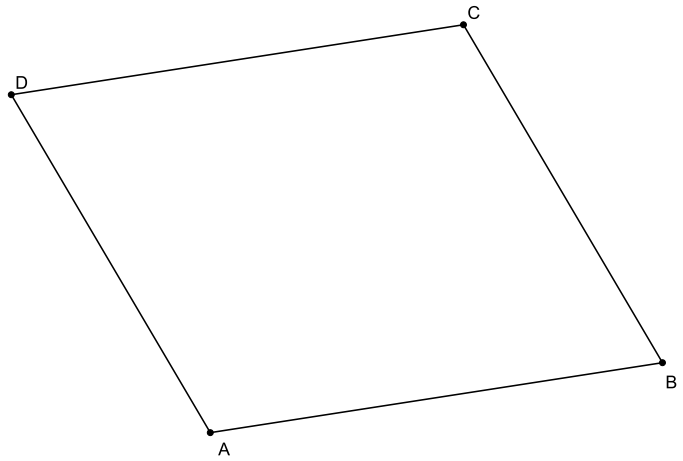
An die Stelle von h_c und h'_c können beliebige Scheitelabschnitte treten, da auch sie in dem gleichen Verhältnis geteilt werden.

10 Kopiervorlagen für Schüleraktivitäten

Aktivität 1 *Schneide das Parallelogramm aus; zerschneide es so, dass Du die Teile als Rechteck zusammenlegen kannst.*

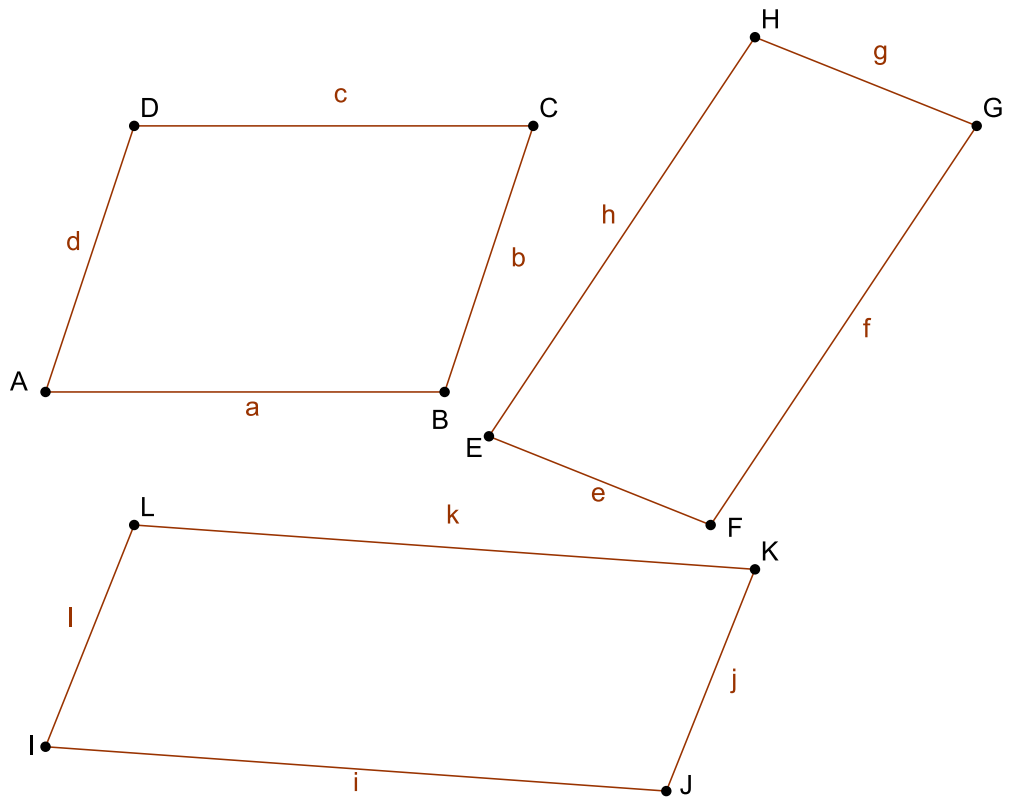




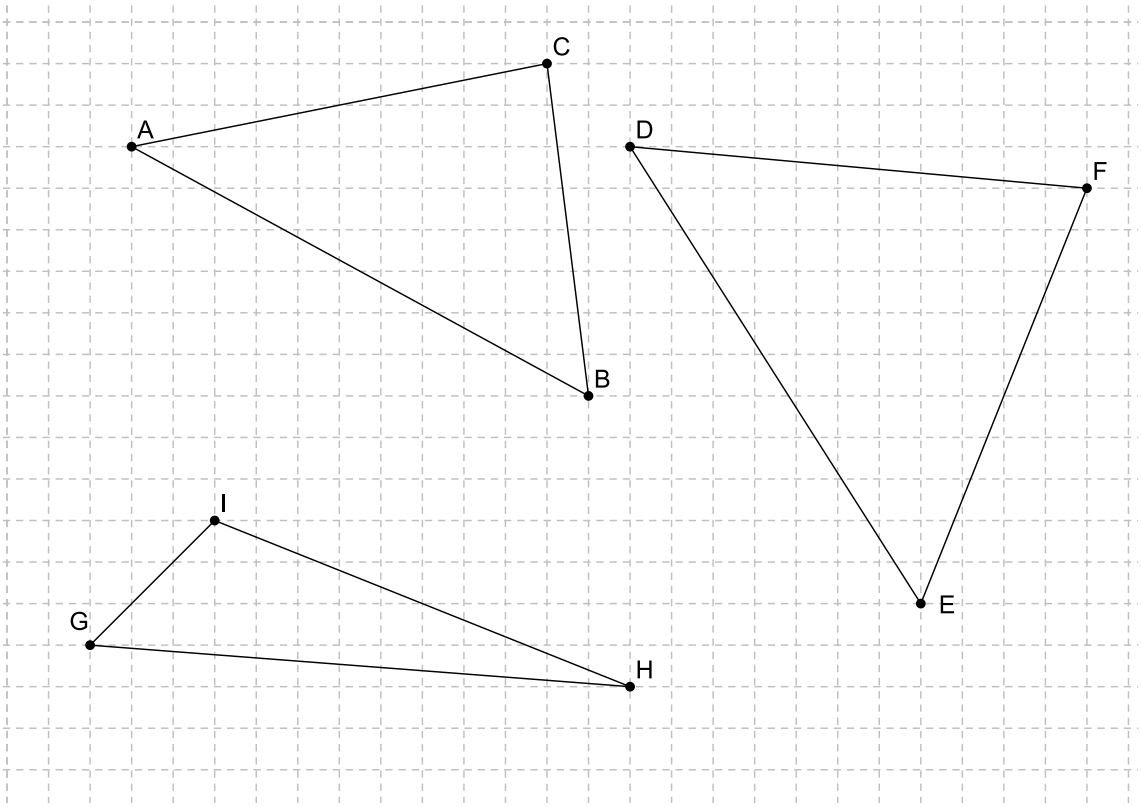


Aktivität 2 *Zeichne alle Höhen des Parallelogramms ein. Bestimme durch Messen die Flächen auf zwei Arten.*

Unten ist genug Platz um die Rechnungen übersichtlich aufzuschreiben.

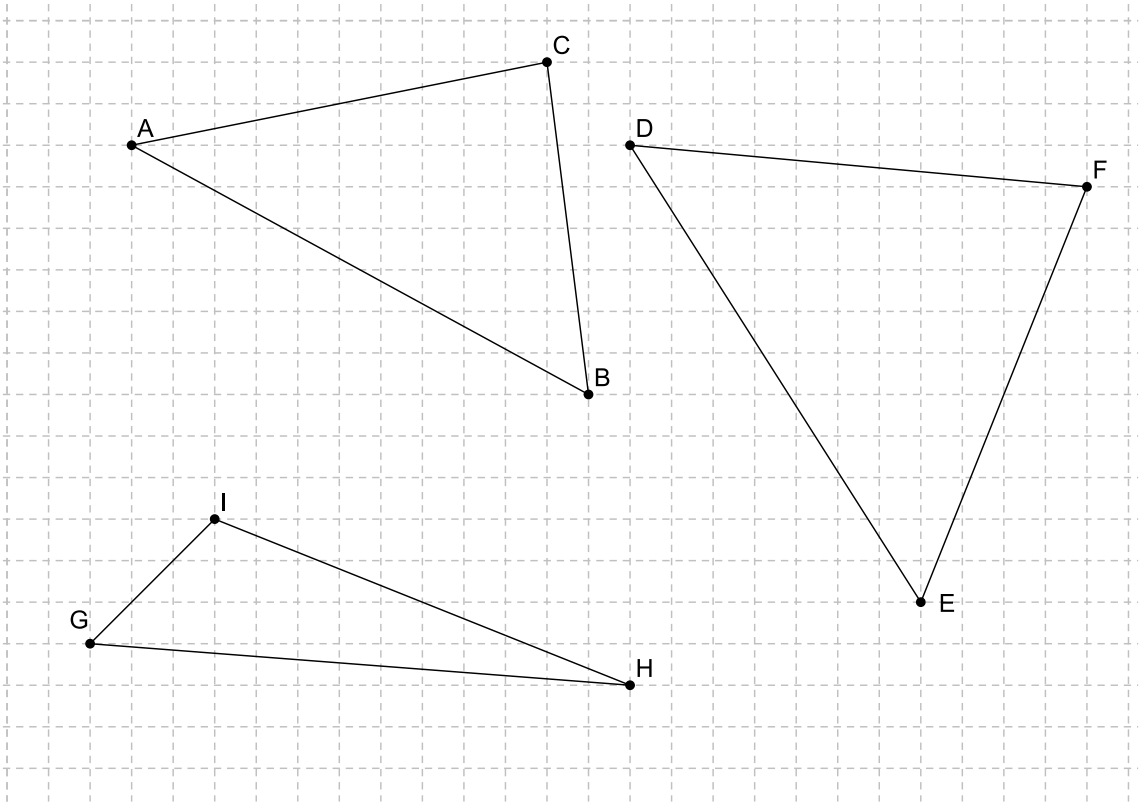


Aktivität 3 *Man kann ein Dreieck auf drei Arten zu einem Parallelogramm erweitern. Mach es bei jedem der Dreiecke auf mindestens zwei Arten und beschreibe Dein Vorgehen.*



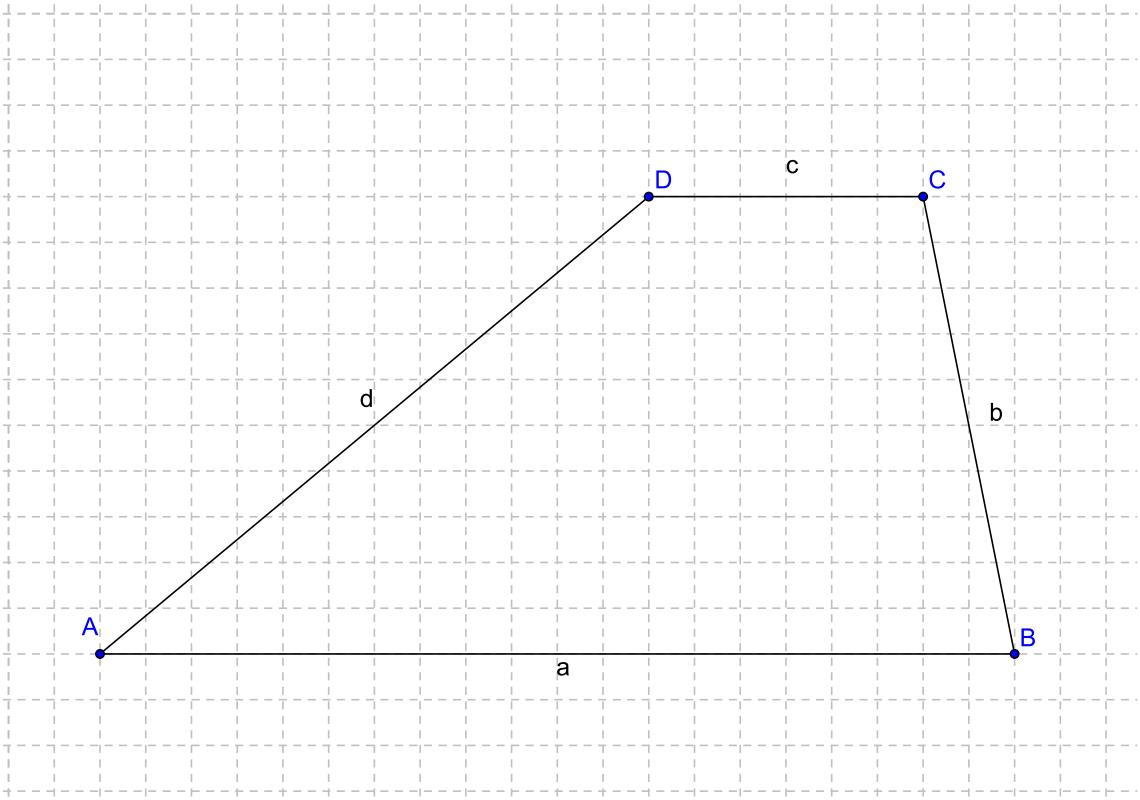
 © 2006

Aktivität 4 *Die Fläche eines Dreiecks ist offenbar von Grundseite und Höhe abhängig. Es ist nicht immer leicht zu erkennen, wo die zur Grundseite passende Höhe liegt. Zeichne für jedes Dreieck alle drei Höhen ein. (Sie sollten sich übrigens in einem einzigen Punkt schneiden.) Bestimme die Flächen der Dreiecke auf jeweils zwei Arten durch Messen von Grundseite und Höhe und Anwenden der Formel.*
Zur Kontrolle: Es sollte immer annähernd derselbe Wert herauskommen!



 © 2006

Aktivität 5 *Wenn Du verstanden hast, warum die Flächenformeln für das Parallelogramm $F = g \cdot h$ und für das Dreieck $F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ lauten, dann kannst Du sicher auch eine Formel für die Fläche eines Trapezes aufstellen. Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten.*



Benutze für Deine Lösung die angegebenen Buchstaben.

 © 2006

Aktivität 6 *Mit einem dynamischen Geometrieprogramm wie zum Beispiel GEOGEBRA kannst Du Dir die funktionale Abhängigkeit der drei Variablen Grundseite, Höhe, Fläche ganz gut klarmachen.*

Lade die Datei funktional.ggb und verändere mit der Lage des Punktes B die Grundseite und mit P die Höhe. Die veränderte Fläche wird sofort ausgerechnet.

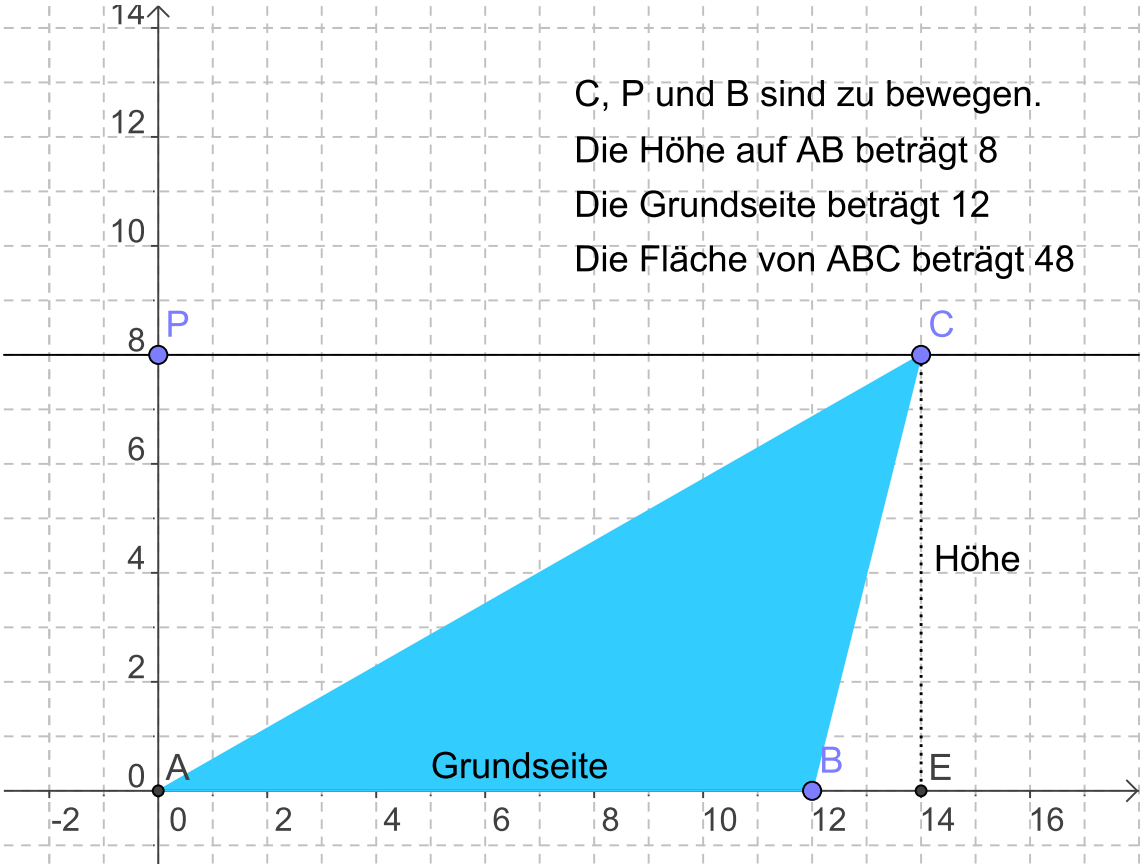
Was passiert, wenn man nur die Grundseite verdoppelt, halbiert, verdreifacht, drittelt?

Was passiert, wenn man nur die Höhe verdoppelt, halbiert, verdreifacht, drittelt?

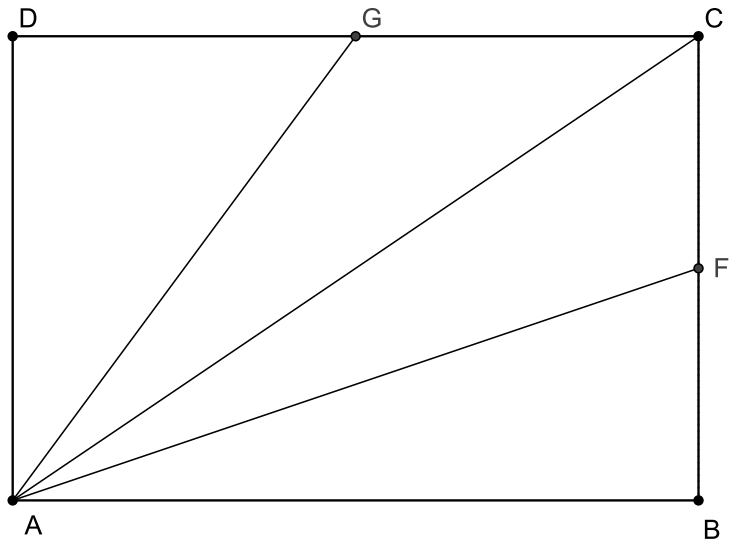
Was passiert, wenn man die Grundseite verdoppelt und die Höhe halbiert?

Was passiert, wenn man die Grundseite halbiert und die Höhe verdreifacht?

Du kannst auch an D und C ziehen; was erwartest Du?



Aktivität 7 *Von einer Ecke A des Rechtecks aus werden die Mittentransversalen und die Diagonale gezeichnet. Beobachte die entstehenden Dreiecke.*



 © 2006

11 zusätzliche Übungsaufgaben

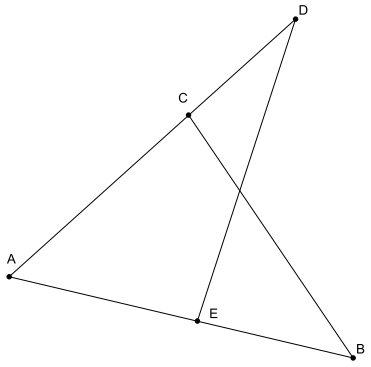
Aufgabe 8 Was ändert sich an der Situation, wenn das Rechteck ein schiefwinkliges Parallelogramm ist? (Skizze siehe Abb. 5 Seite 6)

Aufgabe 9 Von der Ecke D des Parallelogramms wird zusätzlich die zweite Diagonale gezeichnet. Sie schneidet die erste in M. Es ist bekannt, dass M die Diagonalen halbiert. Zu zeigen ist, dass M auf derselben Höhe wie die Seitenmitte F liegt.

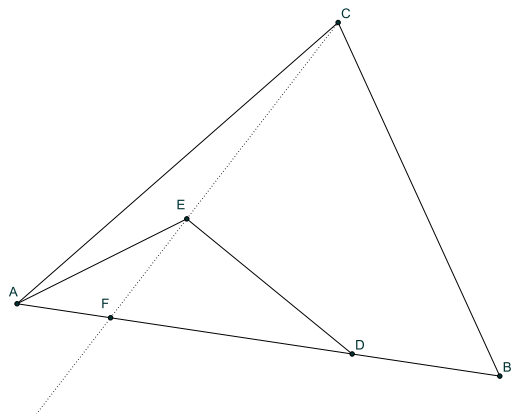
Aufgabe 10 *Parallelogramm $ABCD$, $AB = a = 7cm$, $BC = b = 5cm$, $h_a = 4cm$, berechne h_b.*

Aufgabe 11 *Dreieck ABC, $AB = c = 12cm$, $h_b = 4cm$, $F_{ABC} = 36cm^2$, berechne h_c und b.*

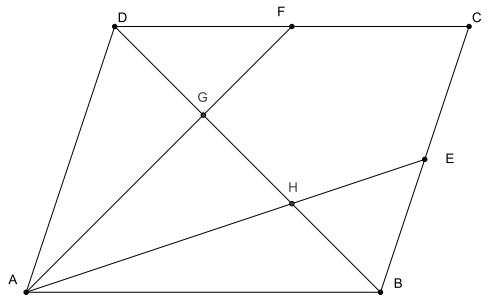
Aufgabe 12 *ABC und AED sollen flächengleich sein. Was kann man über die Lage der Punkte C, E, B, D sagen? Begründe Deine Antwort ausführlich.*



Aufgabe 13 *FE ist die Hälfte von EC; DB ist ein Drittel von AD. Vergleiche die Flächen von $\triangle ADE$ und $\triangle ABC$. Erläutere Deine Lösung ausführlich.*



Aufgabe 14 *E und F sind Seitenmitten. Wie wird die Diagonale BD von den Strecken AE und AF geteilt? Begründe Deine Antwort ausführlich.*



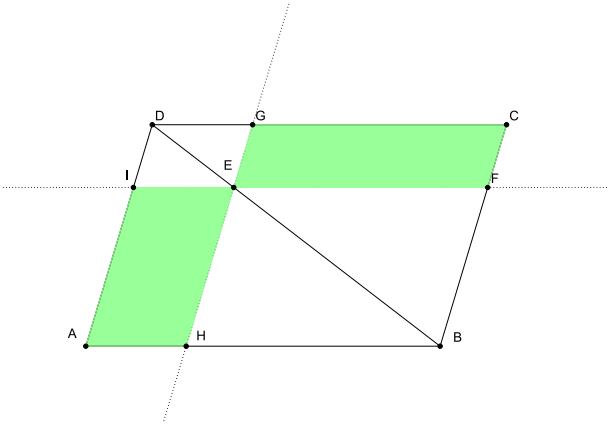
Aufgabe 15 *E liegt auf der Diagonale BD; die Geraden durch E sind parallel zu AB und AD. Vergleiche die markierten Flächen. Begründe Dein Ergebnis ausführlich.*

Aufgabe 16 *In $\triangle ABC$ liegt Q auf AB, $AQ = 3 \cdot QB$, vergleiche F_{ABC}, F_{AQC}, F_{QBC}. Berechne die Fläche von AQC, wenn $AB = c = 16$ und $h_c = 8$ ist.*

Aufgabe 17 *E ist ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen BD des Parallelogramms ABCD; zeige $F_{AED} = F_{ECD}$*

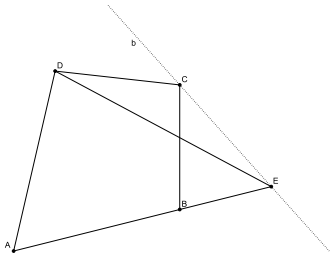
Aufgabe 18 *X ist ein beliebiger Punkt im Inneren des Parallelogramms ABCD; zeige $F_{ABX} + F_{CDX} = F_{DAX} + F_{BCX}$*

 © 2006

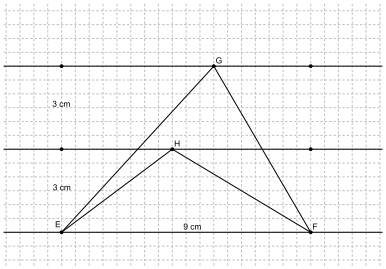


12 Lernerfolgskontrolle

Test-Aufgabe 1 *Es soll sein $b||BD$; begründe,dass $F_{ABCD} = F_{AED}$ ist.*

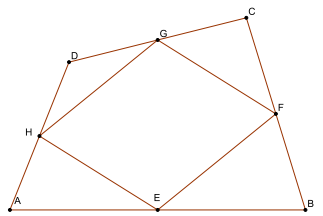


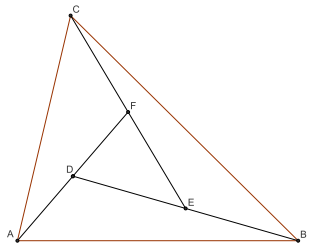
Test-Aufgabe 2 *Bestimme die Fläche F_{EHFG}.*



Test-Aufgabe 3 *Zeige, dass die Fläche des Mittenvierecks $EFGH$ halb so groß wie die des Vierecks $ABCD$ ist.*

Test-Aufgabe 4 *Gegeben ist $\triangle ABC$; die Punkte D, E und F liegen im Inneren des Dreiecks. Es gilt $AD = DF$, $BE = ED$, $CF = FE$; zeige, dass $F_{ABC} = 7 \cdot F_{DEF}$ ist.*





13 Lösungen der Aktivitäten 1 bis 7

zu 1: Die Parallelogramme können ausgeschnitten und auf eine zweite Kopie geklebt werden, dann sieht man die Flächengleichheit besser.
zu 2: Die Flächen sind etwa 18,55; 19,53; 18,6
zu 3: Die Zeichnungen kann man erweitern zum Dreieck mit Mittendreieck, dann sind alle Parallelogramme erkennbar.
zu 4: Die Flächen sind etwa 24,84; 34,56; 12,96
zu 5: Man kann das Trapez zerlegen in Parallelogramm + Dreieck, zwei Dreiecke über Diagonale, drei Dreiecke über beliebigen Punkt auf a. Insgesamt erhält man $F = \frac{1}{2}h(a + c)$.
zu 6: Behält man die Höhe bei und verdoppelt die Grundseite, so verdoppelt sich die Fläche. Behält man die Grundseite bei und verdoppelt die Höhe, so verdoppelt sich die Fläche. Halbiert man die Höhe und verdoppelt die Grundseite, so bleibt die Fläche gleich. Halbiert man die Grundseite und verdreifacht die Höhe, so wird die Fläche 1,5-mal so groß. Behält man die Höhe bei und verdoppelt die Grundseite, so verdoppelt sich die Fläche.
zu 7: Die Dreiecke haben gleiche Fläche. Die Diagonale halbiert die Fläche des Rechtecks. Bei den Teildreiecken werden Grundseite bzw. Höhe halbiert. Also ist jedes Dreieck ein viertel des Rechtecks.

14 Lösungen der zusätzlichen Übungsaufgaben 8 bis 18

zu 8: Nichts ändert sich, da die Höhe gleich bleibt.
zu 9: Begründung wie im Skript:

$$F_{ABM} = F_{ABF} = \frac{1}{4}F_{ABCD} \wedge AB \text{ ist gemeinsame Grundseite}$$
$$\Rightarrow \triangle ABM \text{ und } \triangle ABF \text{ haben dieselbe Höhe}$$

M liegt daher auf derselben Höhe wie F.
zu 10: $a \cdot h_a = b \cdot h_b$
$\Rightarrow 7 \cdot 4 = 5h_b \Rightarrow h_b = 5.6cm$
zu 11: $F = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$
$\Rightarrow 2F : c = h_c = 72 : 12 = 6cm; 2F : h_b = b = 72 : 4 = 18cm$

zu 12: AEC ist beiden Dreiecken gemeinsam; wenn die Reste EBC und EDC gleich sein sollen, muss wegen gemeinsamer Grundseite $EC||BD$ sein.
zu 13: Das Verhältnis von FE und EC $1:2$ wird auf die Höhen übertragen. Außerdem gilt für die Grundseiten $AD:AB=3:4$; das Flächenverhältnis ist also $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=3:8$.
zu 14: $ABH=2BEH; ABD=2ABE \Rightarrow ABD=3ABH \Rightarrow BD=3BH$, entsprechend wird bei G argumentiert; die Diagonale wird also gedrittelt.
zu 15: Die Diagonale halbiert das Parallelogramm. Von jeder Hälfte werden gleiche weiße Dreiecke subtrahiert. Die schraffierten Flächen sind also gleich.
zu 16: Da die Höhen gleich sind, verhalten sich die Flächen wie die Grundseiten. $AQC=3QBC$, $ABC=4QBC$. $ABC=64; AQC=48$
zu 17: Zeichne als Hilfslinie die Parallelen wie in Aufgabe 15. Die Dreiecke haben dann jeweils gleichgroße Teile.
zu 18: Zeichne als Hilfslinie die Parallelen wie in Aufgabe 15. Die Lösung ergibt sich aus der Aufgabe 17.

15 Lösungen der Testaufgaben 1 bis 4

zu 1: Dreieck ABD ist gemeinsam; die aufgesetzten Dreiecke haben gleiche Grundseite BD und gleiche Höhe (Parallele); daher sind die Flächen gleich.
zu 2: $EFH=\frac{1}{2}EFG \Rightarrow EHFG=\frac{1}{2}EFG=13.5$
zu 3: Die Diagonale BD teilt das Viereck $ABCD$. GFC und HAE sind jeweils $\frac{1}{4}$ der Dreiecke, also zusammen $\frac{1}{4}$ des Vierecks. Gleiches gilt bei Teilung über AC. Die äußeren Dreiecke betragen also die Hälfte des Vierecks.
zu 4: Hilfslinien seien AE, BF, CD. Dies sind Seitenhalbierende; wegen je gleicher Höhe halbieren sie auch die Flächen. Es ist zum Beispiel $ABE=AED$; da DE Seitehalbierende in AEF ist, gilt auch $AED=DEF$. Die sechs äußeren Teildreiecke sind mit dem inneren flächengleich.

 © 2006

16 Verteilung auf die Unterrichtsstunden

Stunde	**Thema**	**Aufgabe**	**Hausaufgabe**
1	Fläche Parallelogramm Satz 1	Akti 1	Akti 2 Aufgabe Höhen Parall.
2	Fläche Dreieck Satz 2	Akti 3	Akti 4 Aufgabe Höhen Dreieck
3	Rückblick	Aufg. 10, 11, 12	Akti 5 Trapezformel
4	funktionale Abhäng.	Akti 6	Akti 7 Mittentrans. Rechteck
5	Mittentrans. Parall.	Aufgabe 8	Aufgabe 13
6	Mittentr. Dreieck, Satz 3	Aufgabe 9	Satz 4, Aufg. 14
7	Satz 5 Satz 6 Satz 7	Abb. 10, 11 Tafel	Satz 6 für Teilung drittel
8	Satz 9	Abb. 12 Tafel	Aufgaben 17, 18
9	Rückblick	Aufgaben 15, 16	

 © 2006