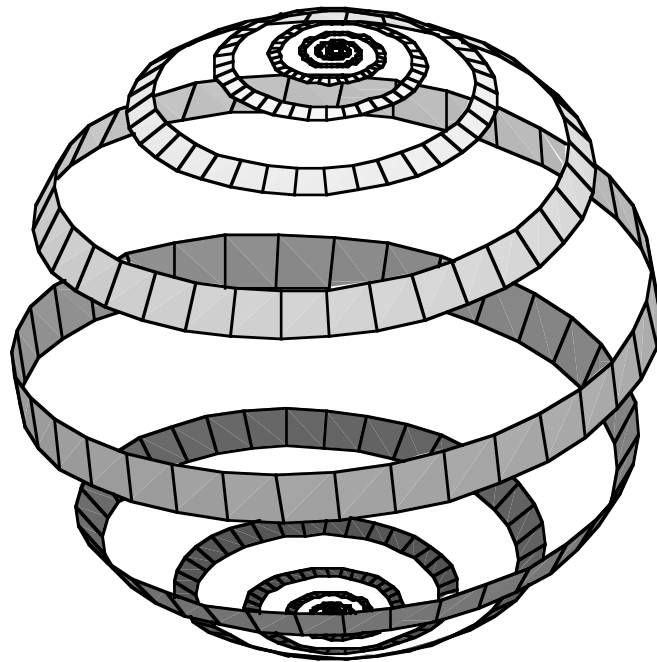


Hans Walser

Konforme Abbildungen, Anwendungen



Inhalt

1 Die HELMERT-Transformation.....	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Die Regressionsgerade.....	1
1.3 Übertragung auf konforme Abbildungen.....	3
1.4 Zusammenfassung	6
1.5 Vergleich mit Drehstreckung.....	7
2 Die MERCATOR-Karte.....	8
2.1 Disposition der MERCATOR-Karte	9
2.2 Herleitung über die stereographische Projektion	10
2.2.1 Stereographische Projektion Kugel → Ebene.....	11
2.2.2 Abbildung Ebene → Streifen	12
2.3 Vergleich mit Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus.....	13
2.4 Geometrische Herleitung der MERCATOR-Karte.....	14
2.5 Zeichnerisches Vorgehen von MERCATOR	15
2.6 Quadratnetz auf der Kugel.....	15
2.7 Loxodromen	17
3 Konforme Interpolation	20
3.1 Lineare Interpolation	20

1994 Probeausgabe

1995 Ergänzungen, Fehlerkorrekturen

1996 Fehlerkorrekturen, kleine Ergänzungen

1997 Umschreibung auf Word 6.0.1, kleine Änderungen

1998 Fehlerkorrekturen

1999 Anpassung an neuen Studienplan

2000 Neue Moduleinteilung. Ergänzungen und Weglassungen

2002 Fehlerkorrekturen. Grafische Überarbeitung

2003 Fehlerkorrekturen

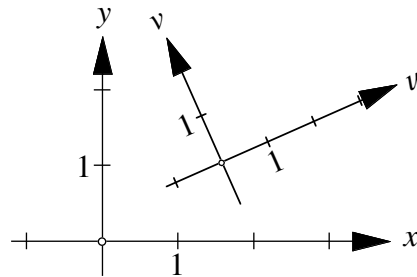
Hans Walser

hwals@bluewin.ch

1 Die HELMERT-Transformation

1.1 Problemstellung

In der ursprünglichen Anwendung von HELMERT ging es darum, für zwei winkeltreue Karten (Ostpreußen und Polen) mit einem gemeinsamen Überlappungsbereich die Abbildung von der einen Karte auf die andere zu finden. In der heutigen Praxis geht es meistens darum, Daten aus einer lokalen Vermessung in eine übergeordnete Karte einzufügen.

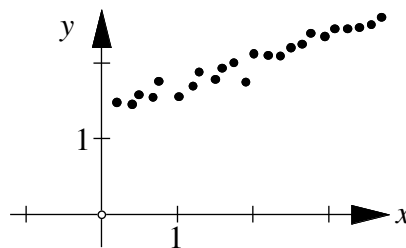


Lokales Koordinatensystem im übergeordneten Koordinatensystem

Der Übergang von einem orthonormierten Koordinatensystem in ein anderes orthonormiertes Koordinatensystem in der Ebene ist theoretisch eine gleichsinnige Ähnlichkeit, also eine Drehstreckung. Eine gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung ist durch Vorgabe von zwei Punkten und ihren Bildern eindeutig definiert. In der Praxis sind aber oft viel mehr Punkte vorhanden, die aber noch mit Meßfehlern versehen sind. HELMERT löste das Problem mit der Ausgleichsmethode der kleinsten Quadrate nach GAUSS. Wir werden sehen, daß seine Methode eine Übertragung der Theorie der Regressionsgeraden auf die komplexe Ebene ist. Der Grund liegt darin, daß eine Drehstreckung im Komplexen durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann; im Reellen beschreibt aber eine lineare Funktion eine Gerade. Wir behandeln daher zunächst die Regressionsgerade im Reellen.

1.2 Die Regressionsgerade

Es ist eine Serie von n Messwertpaaren (x_i, y_i) ; $i = 1, \dots, n$ gegeben, zwischen denen ein linearer Zusammenhang $y = f(x) = ax + b$ vermutet wird.



Serie von n Messwertpaaren

Gesucht ist also eine Funktion $y = f(x) = ax + b$ (effektiv gesucht sind die beiden Koeffizienten a und b), so daß die Summe der Quadrate der Abweichungen

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

minimal wird. Der Graph dieser Funktion heißt *Regressionsgerade*. Wir haben also den Wert

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

zu minimieren. Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach a und b ergibt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i x_i - b \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - bn = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt nach Multiplikation mit $\frac{1}{n}$:

$$\bar{y} - a\bar{x} - b = 0$$

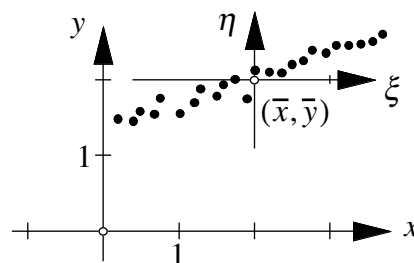
wobei $\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und $\bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ gesetzt wird; \bar{x} und \bar{y} sind also die arithmetischen Mittel der Meßwerte x_i beziehungsweise y_i . Für die gesuchten Koeffizienten a und b gilt also:

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Die Regressionsgerade verläuft durch den *Schwerpunkt* der Meßwerte.

Wir führen nun neue Koordinaten mit dem Ursprung im Schwerpunkt, so genannte *relative Koordinaten*, zum Schwerpunkt, ein:

$$\xi = x - \bar{x} \quad \text{und} \quad \eta = y - \bar{y}$$



Koordinaten relativ zum Schwerpunkt

In diesen Koordinaten bleibt für die Regressionsgerade der Restansatz $\eta = a\xi$. Das Absolutglied b verschwindet. Die Minimierungsbedingung verlangt nun noch die Minimierung von:

$$\Psi(a) = \sum_{i=1}^n (\eta_i - a\xi_i)^2$$

Aus

$$\frac{d\Psi}{da} = \sum_{i=1}^n 2(\eta_i - a\xi_i)(-\xi_i) = 0$$

ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i - a \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 0$$

und damit

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

oder, in den ursprünglichen Koordinaten:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

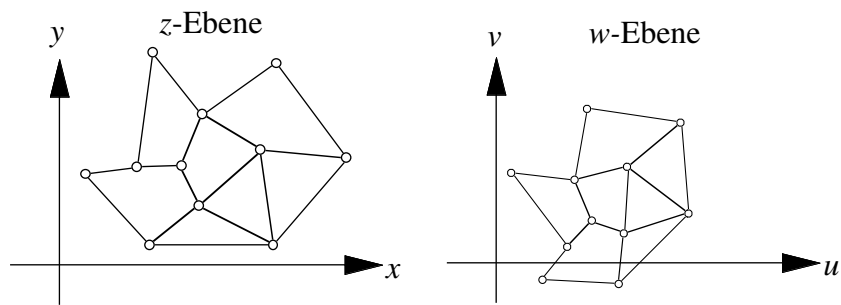
Zusammenfassung:

- Die Regressionsgerade verläuft durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) .

- Steigung a der Regressionsgeraden $a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

1.3 Übertragung auf konforme Abbildungen

Gegeben sind nun n Passpunkte $z_j(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ in der z -Ebene und n zugeordnete Passpunkte $w_j(u_j, v_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ in der w -Ebene.



Zugeordnete Passpunkte

Gesucht ist eine *lineare konforme* Abbildung $w = f(z)$, welche die Zuordnung $z_j \mapsto w_j$ am besten (nach der Methode der kleinsten Quadrate) approximiert. Aus dem Ansatz

$$w = f(z) = az + b, \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = a_3 + ia_4$$

ergibt sich die reelle Darstellung:

$$u = a_1x - a_2y + a_3$$

$$v = a_2x + a_1y + a_4$$

Für $n = 2$, das heißt wenn nur zwei Urbildpunkte und deren Bilder gegeben sind, ergibt sich durch Einsetzen:

$$u_1 - (a_1x_1 - a_2y_1 + a_3) = 0$$

$$v_1 - (a_2x_1 + a_1y_1 + a_4) = 0$$

$$u_2 - (a_1x_2 - a_2y_2 + a_3) = 0$$

$$v_2 - (a_2x_2 + a_1y_2 + a_4) = 0$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die vier gesuchten Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 .

Für $n > 2$ muß mit der Methode der kleinsten Quadrate gearbeitet werden, das heißt, es muß

$$\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{j=1}^n \left((u_j - (a_1x_j - a_2y_j + a_3))^2 + (v_j - (a_2x_j + a_1y_j + a_4))^2 \right)$$

minimiert werden. Wir setzen zunächst die partiellen Ableitungen von $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ nach a_3 und a_4 gleich Null:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_3} = \sum_{j=1}^n 2(u_j - (a_1x_j - a_2y_j + a_3))(-1) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_4} = \sum_{j=1}^n 2(v_j - (a_2x_j + a_1y_j + a_4))(-1) = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$\sum_{j=1}^n u_j = a_1 \sum_{j=1}^n x_j - a_2 \sum_{j=1}^n y_j + na_3$$

$$\sum_{j=1}^n v_j = a_2 \sum_{j=1}^n x_j + a_1 \sum_{j=1}^n y_j + na_4$$

Nach Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ und den Substitutionen

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j, \quad \underbrace{\bar{z}}_{\text{Mittelwert}} := \bar{x} + i\bar{y}$$

$$\bar{u} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j, \quad \bar{v} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j, \quad \underbrace{\bar{w}}_{\text{Mittelwert}} := \bar{u} + i\bar{v}$$

ergibt sich

$$\bar{u} = a_1 \bar{x} - a_2 \bar{y} + a_3$$

$$\bar{v} = a_2 \bar{x} + a_1 \bar{y} + a_4$$

oder in komplexer Schreibweise:

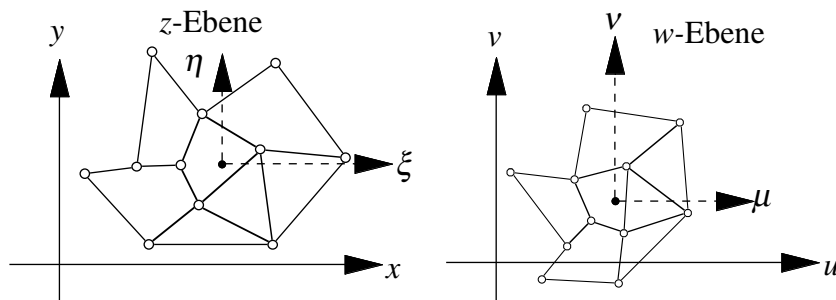
$$\bar{w} = a\bar{z} + b$$

Es gilt also:

Der Schwerpunkt $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$ wird durch die gesuchte Transformation *exakt* auf den Bildschwerpunkt $\bar{w} = \bar{u} + i\bar{v}$ abgebildet; der Schwerpunkt des Bildes ist das Bild des Schwerpunktes.

Wir führen nun *neue Koordinaten relativ zum Schwerpunkt* ein:

$$\xi_j = x_j - \bar{x}, \quad \eta_j = y_j - \bar{y}, \quad \mu_j = u_j - \bar{u}, \quad \nu_j = v_j - \bar{v}$$



Koordinaten relativ zum Schwerpunkt

Damit wird der neue Ursprung zum *Fixpunkt*. Es bleibt ein Restansatz, bei dem das Absolutglied $b = a_3 + ia_4$ entfällt:

$$\mu + i\nu = (a_1 + ia_2)(\xi + i\eta)$$

$$\mu = a_1\xi - a_2\eta$$

$$\nu = a_2\xi + a_1\eta$$

Zu minimieren ist noch:

$$\Psi(a_1, a_2) = \sum_{j=1}^n \left((\mu_j - (a_1 \xi_j - a_2 \eta_j))^2 + (v_j - (a_2 \xi_j + a_1 \eta_j))^2 \right)$$

Nullsetzen der partiellen Ableitungen von $\Psi(a_1, a_2)$ nach a_1 und a_2 liefert:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_1} = \sum_{j=1}^n \left(2(\mu_j - (a_1 \xi_j - a_2 \eta_j))(-\xi_j) + 2(v_j - (a_2 \xi_j + a_1 \eta_j))(-\eta_j) \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_2} = \sum_{j=1}^n \left(2(\mu_j - (a_1 \xi_j - a_2 \eta_j))(+\eta_j) + 2(v_j - (a_2 \xi_j + a_1 \eta_j))(-\xi_j) \right) = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j + \sum_{j=1}^n v_j \eta_j &= a_1 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 - a_2 \underbrace{\sum_{j=1}^n \eta_j \xi_j + \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j}_0 + a_1 \sum_{j=1}^n \eta_j^2 \\ -\sum_{j=1}^n \mu_j \eta_j + \sum_{j=1}^n v_j \xi_j &= -a_1 \underbrace{\sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j}_{-\Sigma} + a_2 \sum_{j=1}^n \eta_j^2 + a_2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + a_1 \underbrace{\sum_{j=1}^n \eta_j \xi_j}_{\Sigma} \end{aligned}$$

Für die gesuchten Koeffizienten a_1 und a_2 erhalten wir:

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j + \sum_{j=1}^n v_j \eta_j}{\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \sum_{j=1}^n \eta_j^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{-\sum_{j=1}^n \mu_j \eta_j + \sum_{j=1}^n v_j \xi_j}{\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \sum_{j=1}^n \eta_j^2}$$

1.4 Zusammenfassung

Gegeben: n Punkte $z_j(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ und n Bildpunkte $w_j(u_j, v_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n > 2$.

Gesucht: Konforme lineare Abbildung $w = f(z)$.

1. Mittelwerte:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$$

$$\bar{u} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j, \quad \bar{v} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j$$

2. Relative Koordinaten (sog. „reduzierte Koordinaten“):

$$\xi_j = x_j - \bar{x}, \quad \eta_j = y_j - \bar{y}, \quad \mu_j = u_j - \bar{u}, \quad v_j = v_j - \bar{v}$$

3. Koeffizienten:

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j + \sum_{j=1}^n \nu_j \eta_j}{\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \sum_{j=1}^n \eta_j^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{-\sum_{j=1}^n \mu_j \eta_j + \sum_{j=1}^n \nu_j \xi_j}{\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \sum_{j=1}^n \eta_j^2}$$

4. Abbildungsgleichungen in reduzierten Koordinaten:

$$\mu = a_1 \xi - a_2 \eta$$

$$\nu = a_2 \xi + a_1 \eta$$

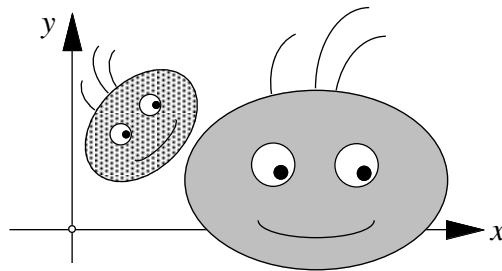
1.5 Vergleich mit Drehstreckung

Eine Drehstreckung mit dem Ursprung als Fixpunkt hat die Abbildungsgleichungen:

$$\mu = r \cos \alpha \xi - r \sin \alpha \eta$$

$$\nu = r \sin \alpha \xi + r \cos \alpha \eta$$

Dabei ist r der Streckungsfaktor und α der Drehwinkel.



Drehstreckung mit $r = 0.5$ und $\alpha = 45^\circ$

Der Vergleich mit unseren Abbildungsgleichungen

$$\mu = a_1 \xi - a_2 \eta$$

$$\nu = a_2 \xi + a_1 \eta$$

liefert:

$$a_1 = r \cos \alpha \quad \text{und} \quad a_2 = r \sin \alpha$$

Damit erhalten wir für den Streckungsfaktor r

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a|$$

und für den Drehwinkel α :

$$\tan \alpha = \frac{a_2}{a_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arg a$$

2 Die MERCATOR-Karte

Nach *Gerhard MERCATOR*, geboren 1512 in Rupelmonde (Flandern), gestorben 1594 in Duisburg.



Gerhard MERCATOR, 1512 - 1594

Gerardus MERCATOR's original name was Gerard de Cremere. He was educated at 'sHer-togenbosch in the Netherlands, then, in 1530, he entered the University of Louvain where he studied the humanities and philosophy. After graduating, MERCATOR began to have worries on how to reconcile the account of the origin of the universe given in the Bible with that given by Aristotle. He travelled to a number of places while going through this personal crisis including Antwerp and Mechelen. His travels did little for his religious worries but gave him a deep interest in geography.

In 1535-1536 MERCATOR working in Louvain with Myrica and with FRISIUS constructed a terrestrial globe. In 1537 they constructed a globe of the stars. MERCATOR produced a map of Palestine (1537), a map of the world with a new projection (1538) and a map of Flanders (1540). MERCATOR was charged with heresy in 1544. This was partly due to his Protestant beliefs, partly due to the fact that he travelled so widely to acquire data for his maps that suspicions were aroused. He spent seven months in prison.

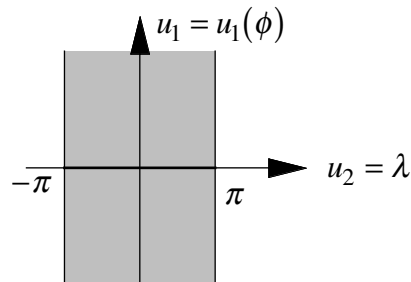
In Duisburg MERCATOR completed a project to produce a new map of Europe (1554) and he taught mathematics there from 1559 to 1562. Further maps followed, one of Lorraine (1564) and one of the British Isles (1564). He was appointed Court Cosmographer to Duke Wilhelm of Cleve, also in 1564. During this period he began to perfect a new map projection for which he is best remembered.

The map projection that bears his name he first used in 1569. He is also the first to use the term 'atlas' for a collection of maps.

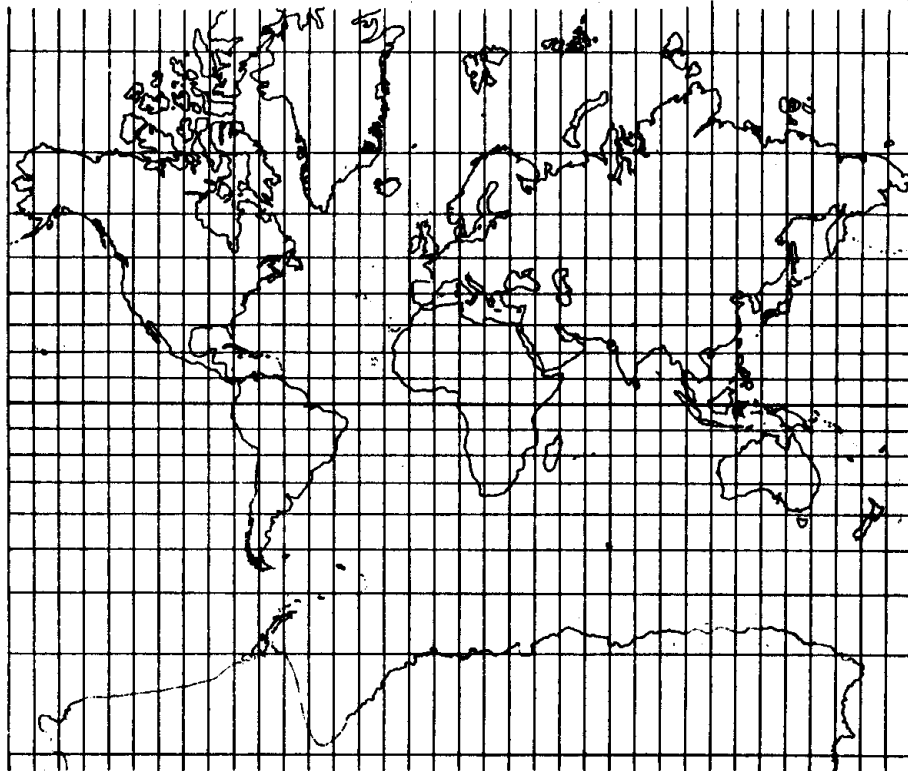
Das Ziel von MERCATOR war, eine winkeltreue Seekarte für die aufkommende Hochseeschifffahrt herzustellen. Noch heute werden in der Hochseeschifffahrt fast ausschließlich MERCATOR-Karten verwendet. Wir werden verschiedene Verfahren zur Herstellung von MERCATOR-Karten besprechen.

2.1 Disposition der MERCATOR-Karte

- Die Karte soll *winkeltreu* sein.
- Als Netz soll das orthogonale Netz der Meridiane und Breitenkreise verwendet werden.
- Der eine Parameter, nämlich u_2 , ist die geographische Länge λ , $u_2 \in [-\pi, \pi]$.



Disposition der MERCATOR-Karte

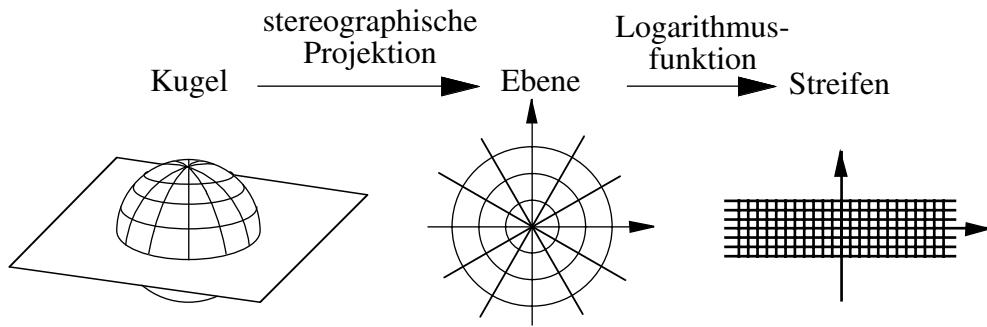


MERCATOR-Karte

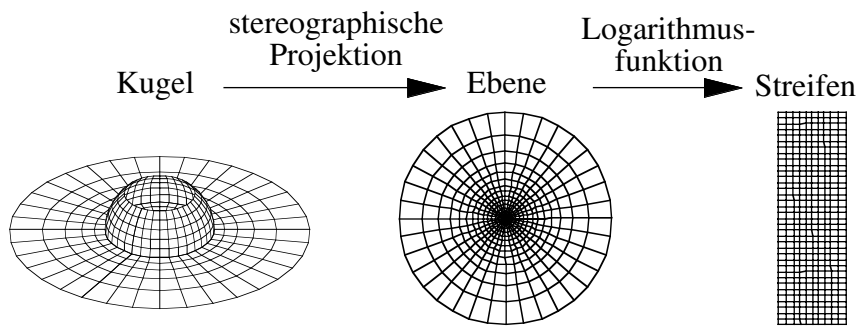
Der andere Parameter, also u_1 , kann *nicht* die geographische Breite ϕ sein, da sonst die Abbildung nur am Äquator winkeltreu wäre. Das Problem besteht nun darin, den Parameter u_1 in Abhängigkeit der geographischen Breite ϕ zu bestimmen; gesucht ist also die Funktion $u_1(\phi)$.

2.2 Herleitung über die stereographische Projektion

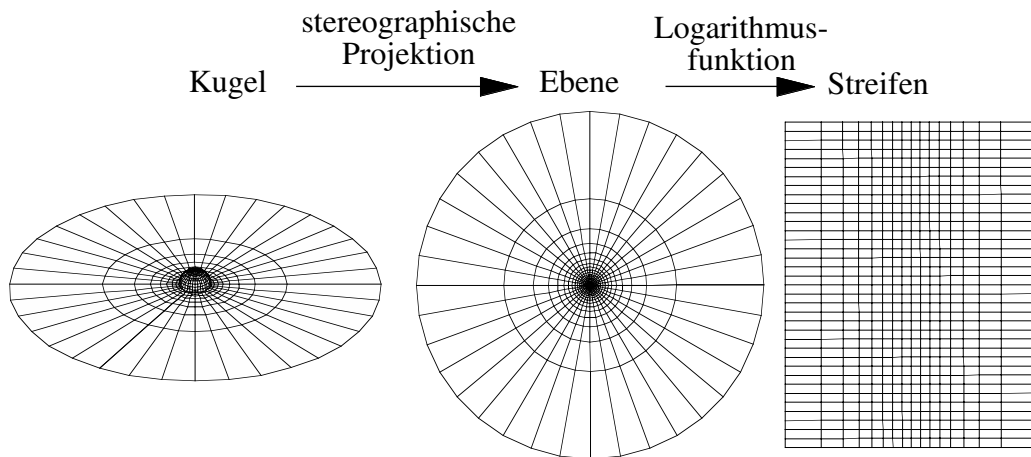
Die stereographische Projektion ist eine winkeltreue Projektion der Kugel auf die Ebene. Da die MERCATOR-Karte ein Streifen der Breite 2π ist, brauchen wir noch eine konforme Abbildung der ganzen Ebene auf einen solchen Streifen. Weil die Exponentialfunktion $w = e^z$ einen solchen Streifen auf die ganze Ebene abbildet, ist deren Umkehrfunktion, also die Logarithmusfunktion $w = \log z$, eine passende Abbildung.



Grundidee mit Hilfe der stereographischen Projektion, Schema



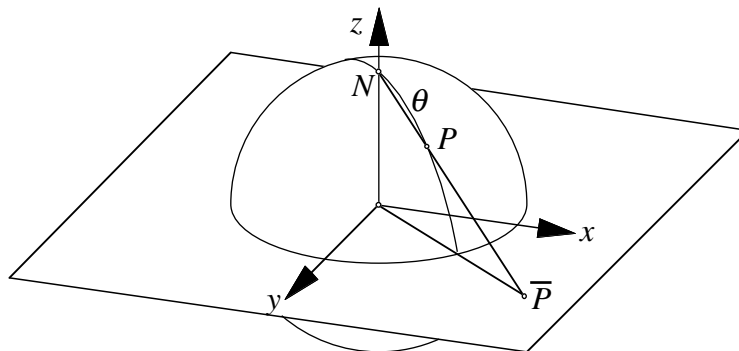
Grundidee mit Netzlinien $-50^\circ \leq \phi \leq 50^\circ$



Grundidee mit Netzlinien $-80^\circ \leq \phi \leq 80^\circ$

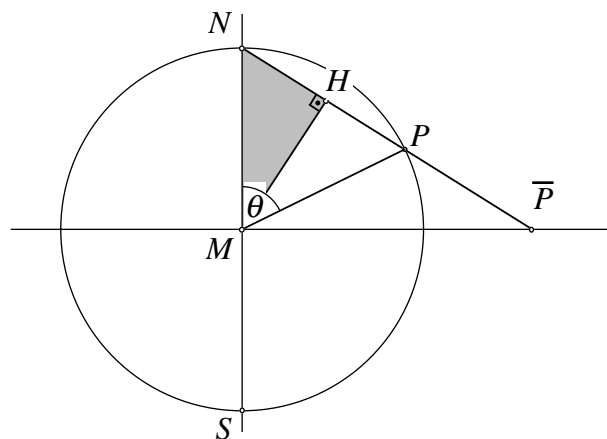
2.2.1 Stereographische Projektion Kugel \rightarrow Ebene

Die stereographische Projektion ist eine Projektion vom Nordpol N aus auf die Äquatorebene.



Die stereographische Projektion

Wir studieren nun einen Achsenschnitt durch den Punkt P ; anstelle der geographischen Breite ϕ verwenden wir die Zenitdistanz θ , es ist $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$.



Achsenschnitt durch P

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MHN und $\bar{P}MN$ folgt $\angle N\bar{P}M = \frac{\theta}{2}$. Damit ist

$$\overline{MN} = 1 = \overline{M\bar{P}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Also ist:

$$\overline{M\bar{P}} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

2.2.2 Abbildung Ebene \rightarrow Streifen

Diese Abbildung wird durch die Logarithmusfunktion geleistet.

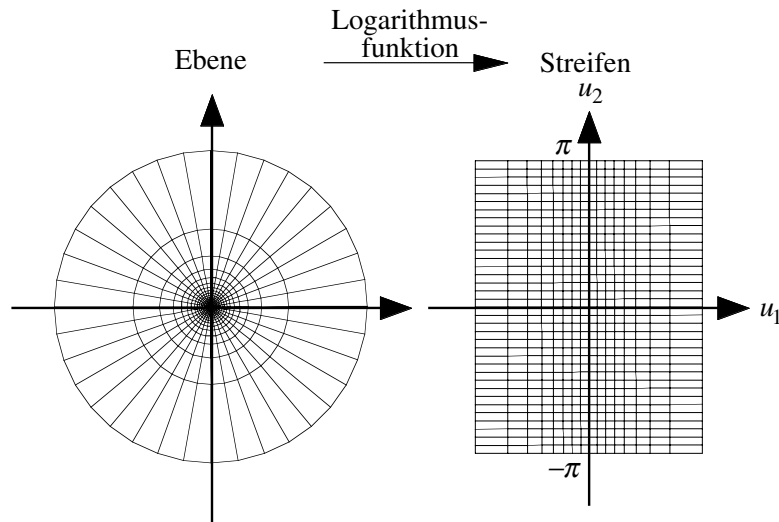


Abbildung von der Ebene auf den Streifen

Ein Kreis mit Radius r wird auf eine Gerade $u_1 = \text{const.}$ abgebildet; und zwar folgt aus $r = e^{u_1}$ die Beziehung $u_1 = \ln r$. Aus $r = \overline{MP}$ folgt:

$$u_1 = \ln r = \ln \overline{MP} = \ln \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$$

Es ist also $u_1 = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$. Für die Umrechnung auf die geographische Breite ϕ folgt aus

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi:$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)}$$

Daraus ergibt sich:

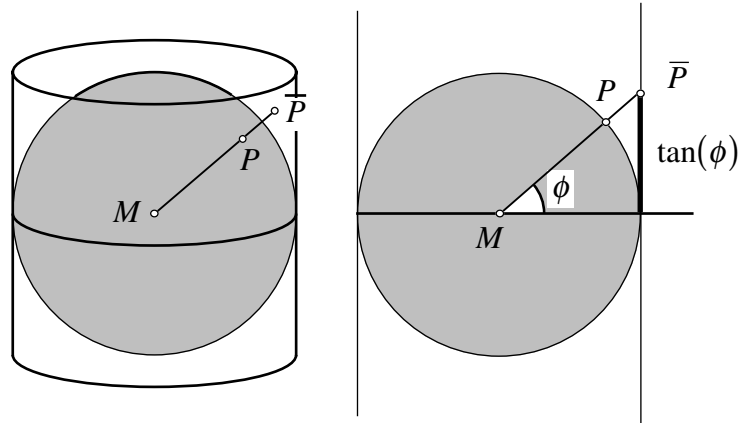
$$u_1 = -\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = -\ln \left(\frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)} \right) = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)$$

Die gesuchte Funktion $u_1(\phi)$ lautet also:

$$u_1(\phi) = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)$$

2.3 Vergleich mit Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus

Die MERCATOR-Karte wird oft verwechselt mit der Abbildung, die sich durch Zentralprojektion der Kugel vom Kugelmittelpunkt aus auf einen die Kugel am Äquator berührenden Zylinder ergibt (sogenannte gnomonische Projektion).



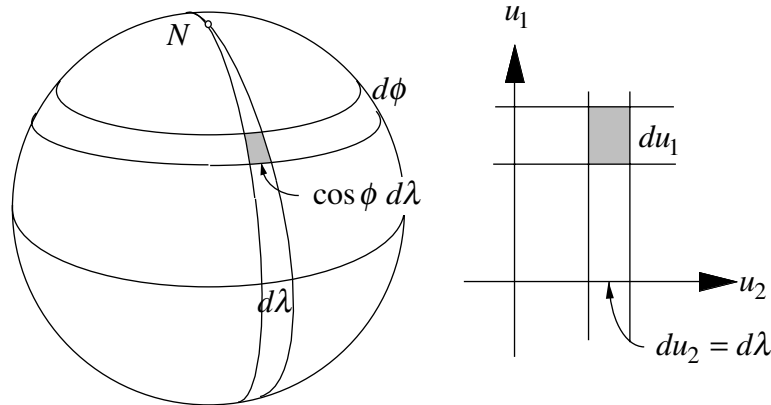
Zentralprojektion auf den Zylinder

Auch in diesem Fall ist $u_2 = \lambda$, hingegen ist $u_1(\phi) = \tan(\phi)$. Die folgende Tabelle zeigt die numerischen Unterschiede:

Geographische Breite	MERCATOR-Karte	Zentralprojektion
ϕ	$u_1(\phi) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)$	$u_1(\phi) = \tan(\phi)$
0°	0.0000	0.0000
1°	0.0174	0.0174
10°	0.1754	0.1763
20°	0.3563	0.3639
30°	0.5493	0.5773
40°	0.7630	0.8391
50°	1.0107	1.1918
60°	1.3170	1.7321
70°	1.7354	2.7475
80°	2.4362	5.6713
89°	4.7413	57.2900
89.9°	7.0440	592.9572

2.4 Geometrische Herleitung der MERCATOR-Karte

Ein durch die Meridiane für λ und $\lambda + d\lambda$ sowie durch die Breitenkreise für ϕ und $\phi + d\phi$ begrenztes infinitesimal kleines Rechteck auf der Einheitskugel hat die Länge $\cos \phi d\lambda$ und die Breite $d\phi$.



Geometrische Herleitung

Sein Bildrechteck hat die Länge $du_2 = d\lambda$. Infolge der Konformität müssen die beiden Rechtecke ähnlich sein; sie haben also den Streckungsfaktor $s = \frac{1}{\cos \phi}$. Daher hat das Bildrechteck die Breite $du_1 = s d\phi = \frac{d\phi}{\cos \phi}$. Aus $du_1 = s \frac{d\phi}{\cos \phi}$ folgt durch Integration (Formelsammlung):

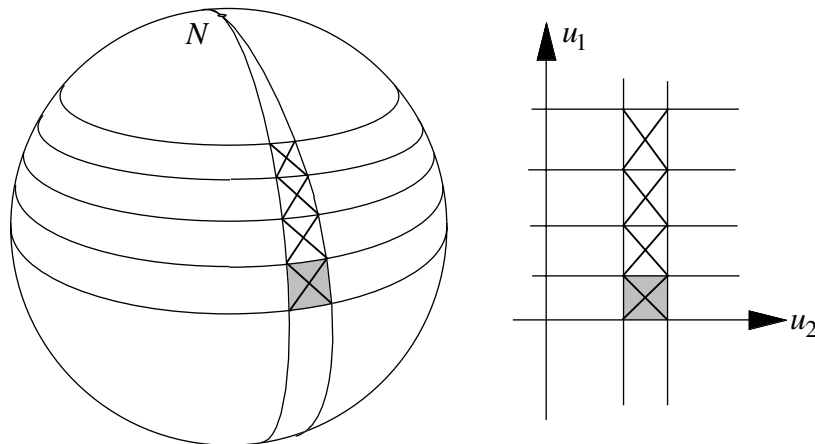
$$u_1(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\cos \psi} = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Kontrolle durch Ableiten:

$$\frac{d}{d\phi} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} = \frac{1}{\cos \phi}$$

2.5 Zeichnerisches Vorgehen von MERCATOR

Zu MERCATORS Zeit waren weder die Integration noch die Logarithmusfunktion bekannt. MERCATOR löste das Problem auf zeichnerischem Wege. Infolge der Konformität müssen sich die Diagonalen zugeordneter „kleiner“ Rechtecke unter demselben Winkel schneiden. Daraus ergibt sich, beginnend beim Äquator, ein schrittweises zeichnerisches Vorgehen.

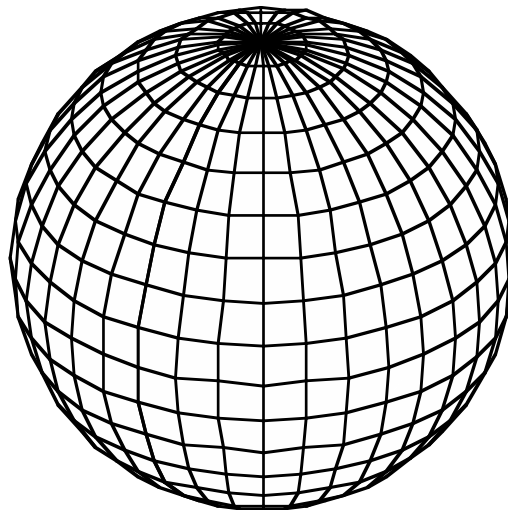


Zeichnerisches Vorgehen von MERCATOR

Aus heutiger Sicht ist das eine graphische iterative Methode zur Bestimmung eines Integrals.

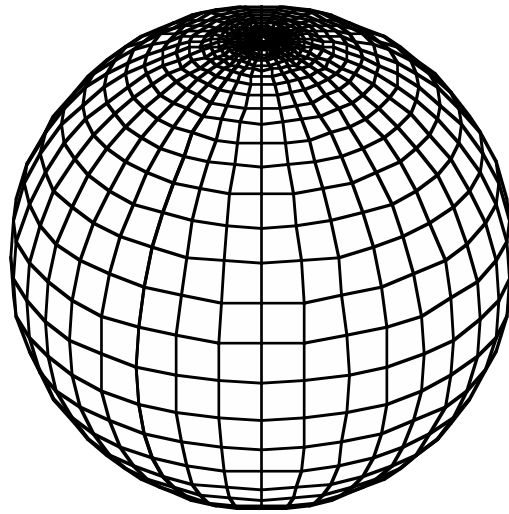
2.6 Quadratnetz auf der Kugel

Die übliche Plattkarte führt zu einem Netz auf der Kugel, das nur am Äquator quadratisch ist.



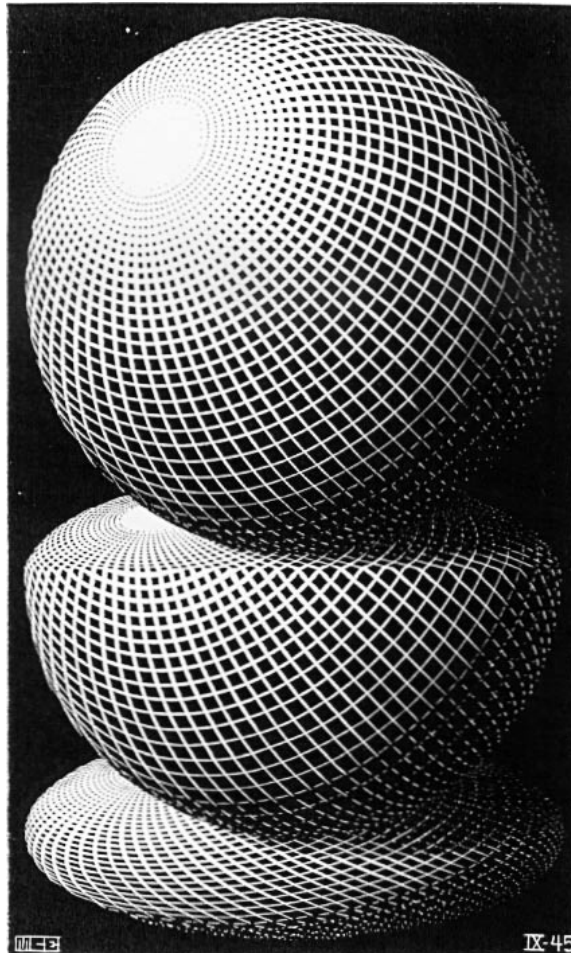
Netz der Plattkarte auf der Kugel mit Äquidistanz 10°

Die MERCATOR-Karte liefert wegen der Konformität ein globales Quadratnetz auf der Kugel.



Quadratnetz der MERCATOR-Karte

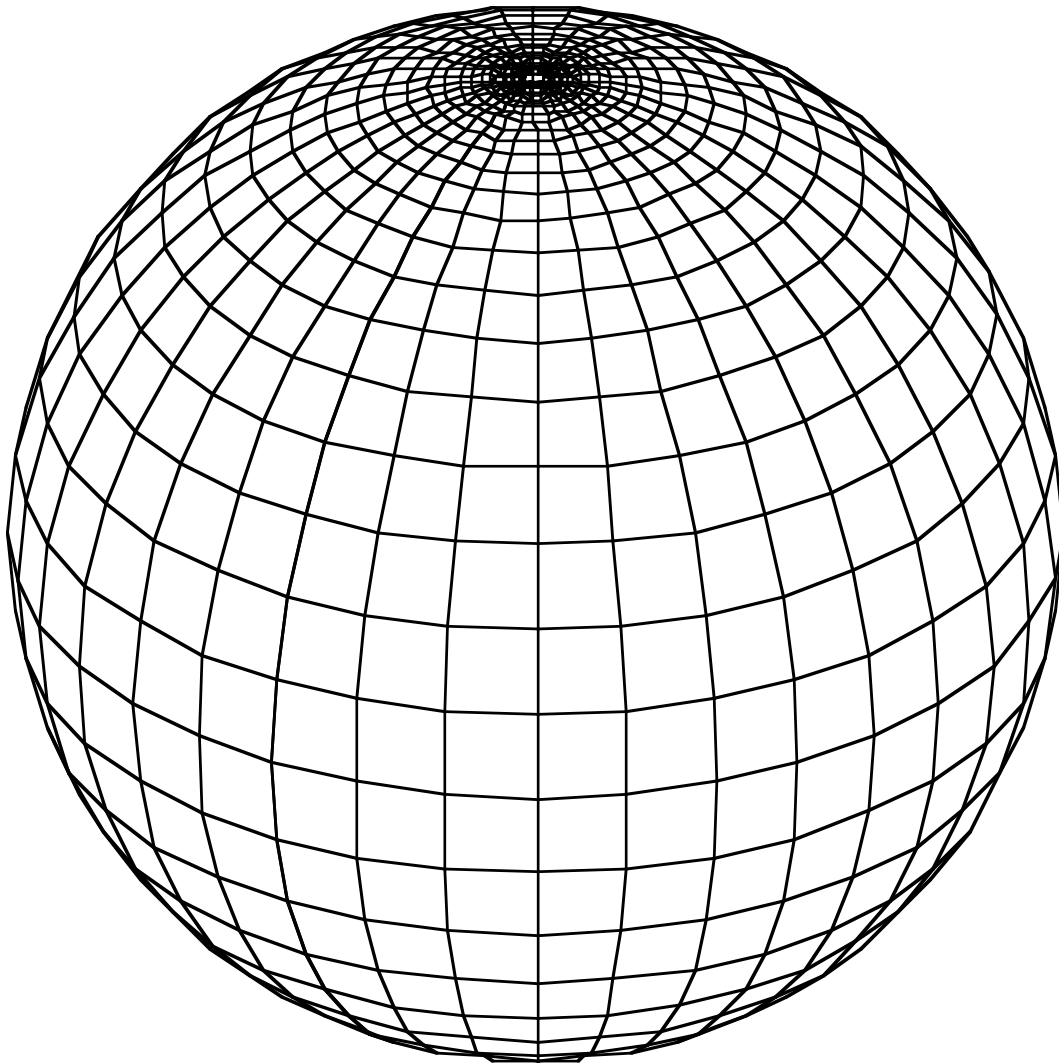
Solche Netze sind von M. C. ESCHER als Grundlage von Graphiken verwendet worden.



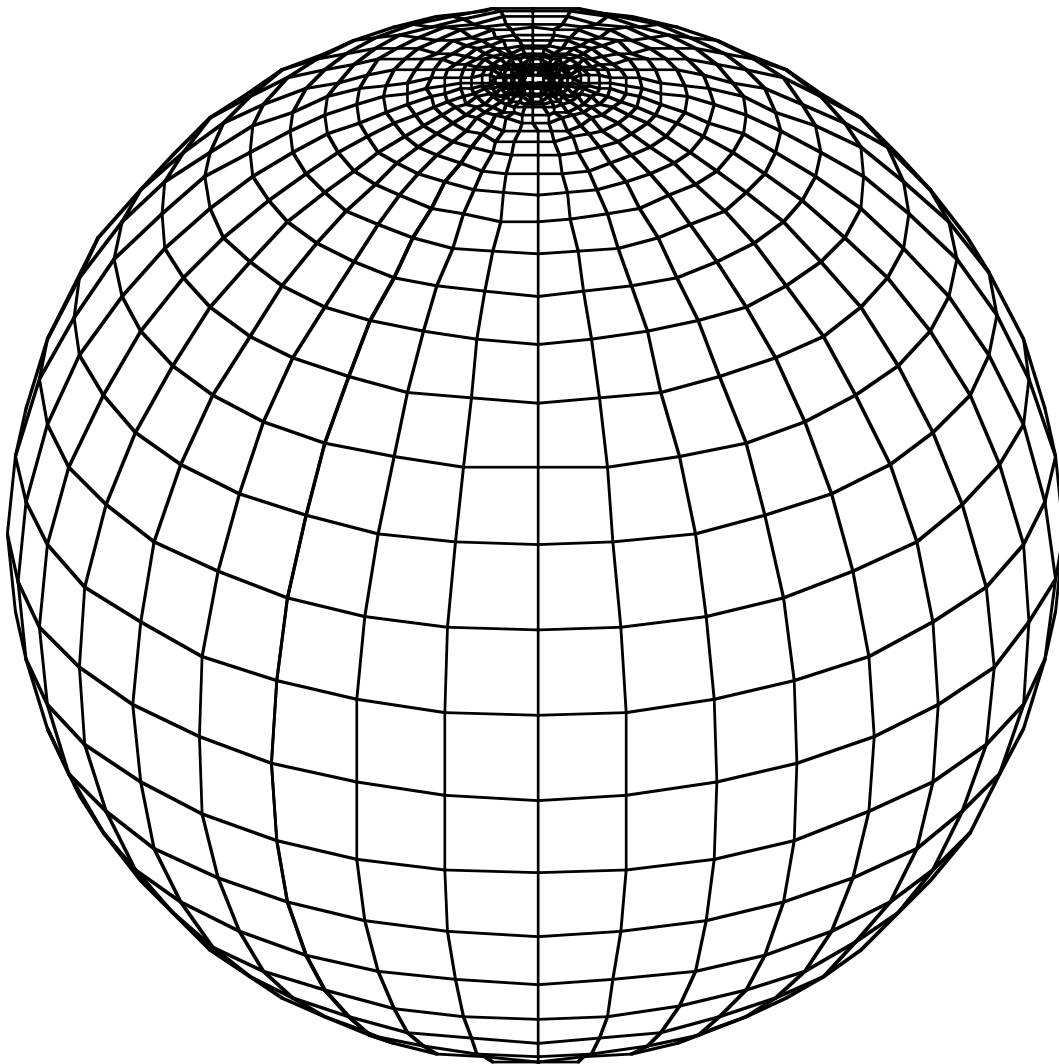
M. C. Escher: Drie bollen I - Drei Kugeln I

2.7 Loxodromen

Ein Flugzeug fliegt mit konstantem Kurs. Welche Kurve beschreibt dieses Flugzeug?



Beispiel: Kurs = 45° (Quadratdiagonalen)



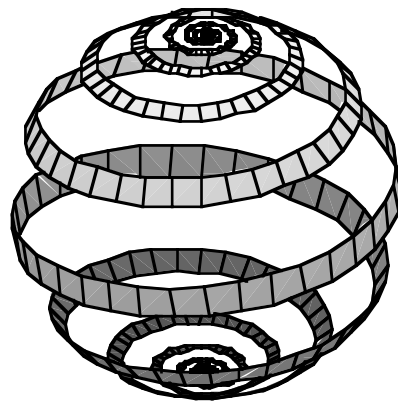
Beispiel: Kurs = $\arctan(2) \approx 63.435^\circ$

Definition: Eine Kurve, welche die Meridiane unter konstanten Winkel schneidet, heißt *Loxodrome*. In einer MERCATOR-Karte erscheint eine Loxodrome als Gerade. Loxodromen werden im Flugwesen und in der Seefahrt verwendet. Sie sind aber keine Großkreisbogen, also nicht kürzeste Verbindungen.

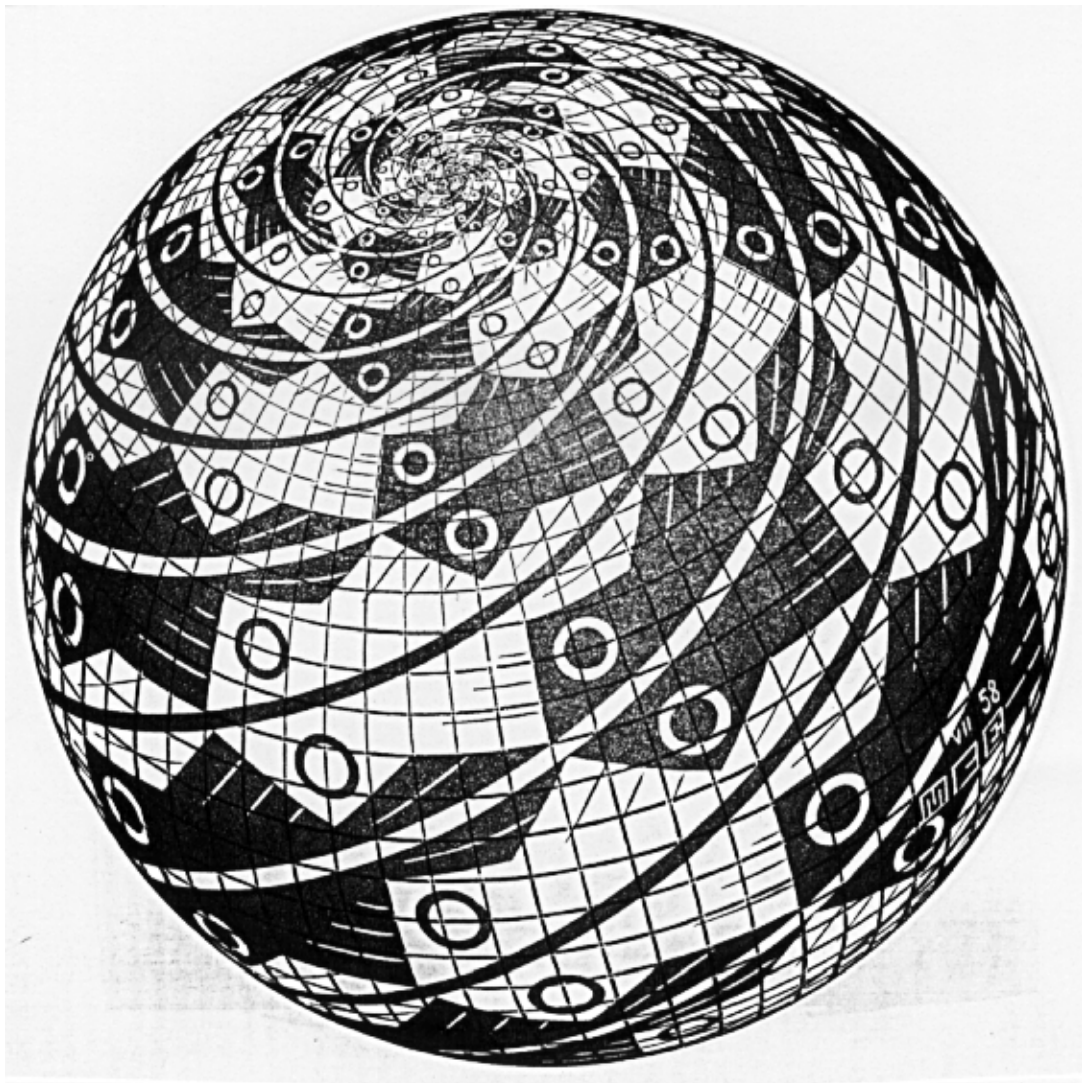
Beispiel: Loxodrome mit Kurs = $\arctan(10) \approx 84.289^\circ$.

Maple-Programm:

```
plot3d([    cos((10*u-v)/sqrt(101)/180*Pi)/cosh((u+10*v)/sqrt(101)/180*Pi),
           sin((10*u-v)/sqrt(101)/180*Pi)/cosh((u+10*v)/sqrt(101)/180*Pi),
           tanh((u+10*v)/sqrt(101)/180*Pi)],
u=-2880..2880, v=-5..5, grid=[577,2],
scaling=constrained, orientation=[0,60], style=patch);
```



Loxodrome mit Kurs = $\arctan(10) \approx 84.289^\circ$.

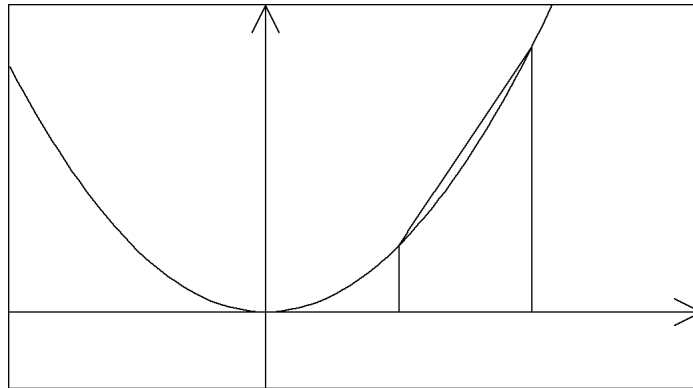


M. C. Escher: Boloppervlak med vissen - Kugeloberfläche mit Fischen

3 Konforme Interpolation

3.1 Lineare Interpolation

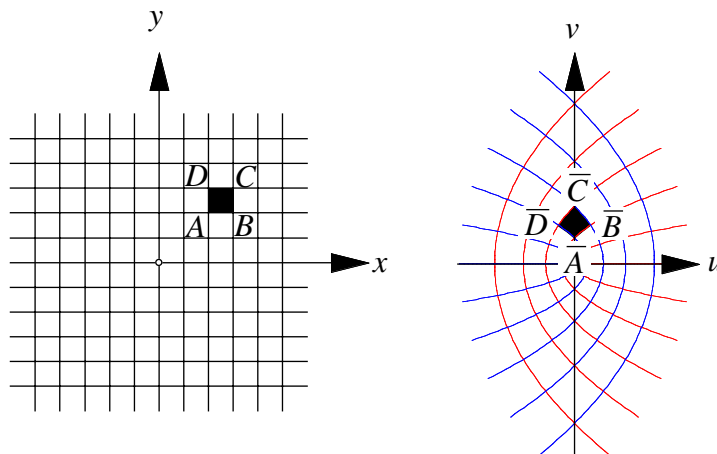
Im Reellen bedeutet lineare Interpolation, daß der Funktionsgraph zwischen zwei Stützstellen durch eine Gerade ersetzt wird.



Lineare Interpolation im Reellen

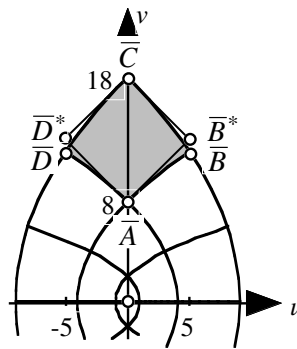
Je kleiner der Abstand zwischen den beiden Stützstellen ist, um so besser wird die Approximation durch die Interpolation.

Dieses Verfahren läßt sich ins Komplexe übertragen. Wir illustrieren das am Beispiel der Funktion $w = f(z) = z^2$. Das exakte Bild des Netzquadrates $ABCD$ ist ein von Parabelbögen berandetes krummliniges Viereck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$.



Lineare Interpolation im Komplexen

Wir ersetzen nun die Abbildung durch eine lineare Abbildung mit den Stützstellen A und C . Eine lineare Abbildung im Komplexen ist eine Drehstreckung; das Quadrat $ABCD$ wird somit auf ein drehgestrecktes Quadrat $\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*\bar{D}^*$ abgebildet, wobei die Stützstellen \bar{A}^* und \bar{C}^* mit den exakten Bildpunkten \bar{A} und \bar{C} übereinstimmen.



Exaktes Bild und Approximation

Für ein numerisches Beispiel verwenden wir die reelle Schreibweise der Funktion $w = f(z) = z^2$ also:

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

Damit erhalten wir die exakten Werte:

$$A \quad 2+2i \quad \mapsto \quad \bar{A} \quad 0+8i$$

$$B \quad 3+2i \quad \mapsto \quad \bar{B} \quad 5+12i$$

$$C \quad 3+3i \quad \mapsto \quad \bar{C} \quad 0+18i$$

$$D \quad 2+3i \quad \mapsto \quad \bar{D} \quad -5+12i$$

Die lineare Approximation ist eine Abbildung $w^* = az + b$ mit $a = a_1 + a_2i$ und $b = a_3 + a_4i$. In reeller Darstellung bedeutet dies:

$$u^* = a_1x - a_2y + a_3$$

$$v^* = a_2x + a_1y + a_4$$

Die Stützstellen-Bedingung:

$$A \quad 2+2i \quad \mapsto \quad \bar{A} \quad 0+8i$$

$$C \quad 3+3i \quad \mapsto \quad \bar{C} \quad 0+18i$$

liefert die vier Gleichungen

$$A \quad \mapsto \quad \bar{A} \quad : \quad 0 = 2a_1 - 2a_2 + a_3 \quad ; \quad 8 = 2a_2 + 2a_1 + a_4$$

$$C \quad \mapsto \quad \bar{C} \quad : \quad 0 = 3a_1 - 3a_2 + a_3 \quad ; \quad 18 = 3a_2 + 3a_1 + a_4$$

mit den Lösungen:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -12$$

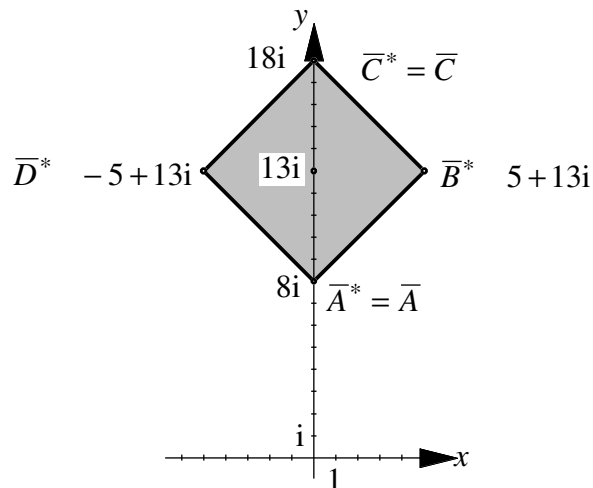
Somit gelten für die lineare Approximation die Abbildungsgleichungen:

$$u^* = 5x - 5y$$

$$v^* = 5x + 5y - 12$$

Daraus ergeben sich folgende approximative Werte:

$$\begin{aligned}
 A \quad 2+2i &\mapsto \bar{A}^* \quad 0+8i \quad (\text{exakt}) \\
 B \quad 3+2i &\mapsto \bar{B}^* \quad 5+13i \\
 C \quad 3+3i &\mapsto \bar{C}^* \quad 0+18i \quad (\text{exakt}) \\
 D \quad 2+3i &\mapsto \bar{D}^* \quad -5+13i
 \end{aligned}$$



Approximationsquadrat

Der Fehlbetrag bei den Punkten B und D ist 1, also gleich der Seitenlänge des Ausgangs-
quadrates.

Wir führen nun dieselben Rechnungen für ein Ausgangsquadrat der Seitenlänge 0.1
durch. Dann ergeben sich die exakten Werte

$$\begin{aligned}
 A \quad 2+2i &\mapsto \bar{A} \quad 0+8i \\
 B \quad 2.1+2i &\mapsto \bar{B} \quad 0.41+8.4i \\
 C \quad 2.1+2.1i &\mapsto \bar{C} \quad 0+8.82i \\
 D \quad 2+2.1i &\mapsto \bar{D} \quad -0.41+8.4i
 \end{aligned}$$

und die approximierten Werte:

$$\begin{aligned}
 A \quad 2+2i &\mapsto \bar{A}^* \quad 0+8i \quad (\text{exakt}) \\
 B \quad 2.1+2i &\mapsto \bar{B}^* \quad 0.41+8.41i \\
 C \quad 2.1+2.1i &\mapsto \bar{C}^* \quad 0+8.82i \quad (\text{exakt}) \\
 D \quad 2+2.1i &\mapsto \bar{D}^* \quad -0.41+8.41i
 \end{aligned}$$

Der Fehlbetrag bei den Punkten B und D ist jetzt nur noch 0.01, also gleich einem Zehn-
tel der Seitenlänge des Ausgangsquadrates.