Regelmäßige Vielecke

Ein Beitrag zur Geometrie der Klasse 5

M. Spielmann

1 Einleitung

Drei wesentliche Lernzielbereiche werden durch die beschriebenen Aufgaben abgedeckt: Neben der Beachtung des Bewegungsdranges der Schüler und des Interesses an aktivem Handeln finden die beiden geistigen Aspekte, Förderung des ästhetischen Empfndens und Entwicklung kognitiver Strategien Berücksichtigung. Die Schüler werden an den Gebrauch des Zeichenmaterials, des Geodreiecks und des Zirkels gewöhnt, sie lernen technisch genaues Arbeiten, sie können ihre Freude an schönen, regelmäßigen Mustern befriedigen, die natürlich erst dann richtig schön sind, wenn sie auch genau gezeichnet sind, und sie werden intellektuell gefordert, wenn sie erkannte Gleichmäßigkeiten und Prinzipien begründen wollen.

2 Voraussetzungen

Zunächst seien einige Voraussetzungen für den im folgenden beschriebenen Unterrichtsgang genannt. Die Schüler sind geübt im Gebrauch des Lineals und des Winkelmessers. Die Winkelsumme im Dreieck wurde durch Umlaufen begründet. Der Umlaufbeweis wurde verallgemeinert, so daß die Schüler auch die Winkelsumme z.B. eines 1000-Ecks angeben können.
Symmetrien sind im Unterricht der Grundschule vorbereitet.

3 Die erste Aufgabe: regelmäßiges Sechseck durch Umlaufen zeichnen

Die erste Aufgabe knüpft thematisch an den Umlaufbeweis an; sie wird zunächst an der Tafel für alle Schüler sichtbar gelöst. „Gehe von einem Punkt aus 40 cm geradeaus, drehe dich um 60 Grad nach links, gehe dann in der neuen Richtung wieder 40 cm, wiederhole das Verfahren. Beschreibe die entstehende Figur!" (Fig. 1) Es stellt sich die Frage, ob sich die entstehende Figur schließt und ob sie regelmäßig sein muß. Von den meisten Schülern wird die Regelmäßigkeit der Figur über die Regelmäßigkeit der Zeichenvorschrift begründet. Und falsch ist das ja auch nicht, wohlgemerkt unter der Voraussetzung, daß die Figur tatsächlich geschlossen ist.

Ob sich die Figur nun wirklich schließt, läßt sich an individuellen Zeichnungen kaum nachprüfen. Prinzipiell sind Zeichenungenauigkeiten immer vorhanden. Nachdenken und Argumentieren muß auf das zeichnerische Experimentieren folgen. An dieser Stelle bedarf es der Führung des Lehrers. Auf die folgende Art kann man Argumente für das Schließen der Figur gewinnen: Der Lehrer bringt ein regelmäßiges Sechseck mit in den Unterricht; allerdings sollten die Schüler erfahren, daß er es auf andere Art gezeichnet hat. Die Schüler erkennen nun durch den ihnen bekannten Winkelsummensatz und durch die Regelmäßigkeit der Figur die Übereinstimmung in den Winkeln. Werden nun die Seiten noch gemessen, führen anschauliche Kongruenzüberlegungen dazu, daß man das Schließen gemäß der obigen Konstruktionsvorschrift akzeptieren kann. Ein vorgegebenes Sechseck erfüllt die Konstruktionsvorschrift; daher muß die nach der Vorschrift erzeugte Figur ein geschlossenes Sechseck sein. Fragen nach der Existenz und Eindeutigkeit sind auf dieser Stufe des Argumentierens sicher nicht notwendig.

Um die Symmetrie des regelmäßigen Sechsecks zu untersuchen, teilt der Lehrer solche vorbereiteten Figuren aus Papier aus. Einige Schüler falten die Sechsecke aufeinander. Wegen der Gleichheit der Innenwinkel und der Seiten kann man die Teilfiguren auf zwei Arten zur Deckung bringen: über die Ecken gefaltet und über die Seitenmitten gefaltet. Die Regelmäßigkeit der Figur kann man so kaum klarer erleben. Bei der Faltung über die Ecken werden die Schüler auf das charakteristische gleichwinklige Dreieck stoßen; die Begründung für die Winkelgleichheit wird den Schülern nicht schwerfallen. Sozusagen als Nebenprodukt ergibt sich die einfachere Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks (allgemeiner des regelmäßigen n-Ecks), indem der Kreis in 6 gleiche Sektoren geteilt wird.

Als Erweiterung der Aufgabenstellung kann man von den Schülern jetzt eine Zeichnung mit einem Winkel von 72 Grad verlangen (Fig. 2), doch zuvor sollten die Schüler die Anzahl der Ecken bestimmen. Sie folgt aus dem Satz, daß die Summe aller Außenwinkel 360 Grad beträgt.

Um die gegenseitige Abhängigkeit von Außenwinkel, Innenwinkel und Mittelpunktswinkel zu beobachten, kann man eine Tabelle aufstellen, die einige n-Ecke enthält. Damit die Schüler das bisher nach einem Umlauf erfolgte Schließen der Figur nicht als selbstverständlich ansehen, sollten sie die Aufgabe für einen 80 Grad großen Winkel durchführen; nach zweimaligem Umlauf schließt

Fig. 1

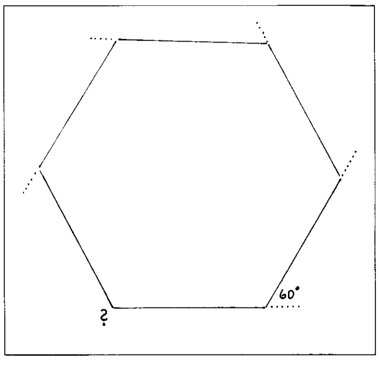


Fig. 2

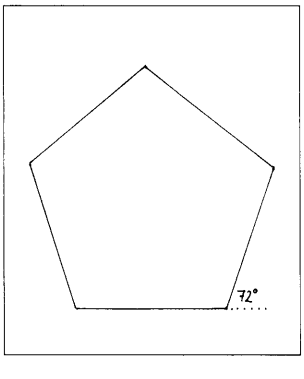


Fig. 3

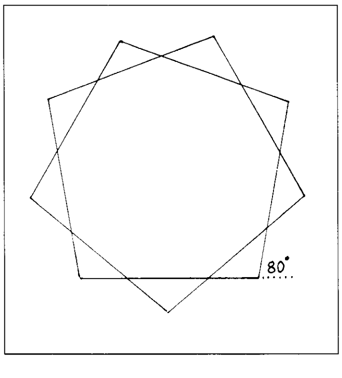
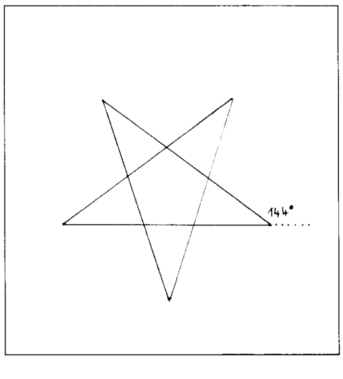


Fig. 4



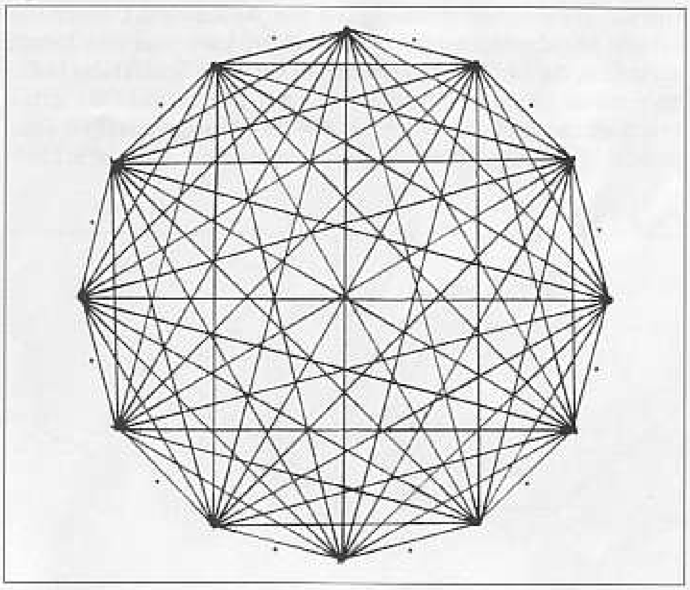
sich jetzt ein Neunstern (Fig. 3). Die für die Augen ziemlich unruhige Figur scheint auf den ersten Blick aus zwei überlagerten Fünfecken zu bestehen.

144 Grad (Fig. 4) läßt die sehr schöne Figur des Fünfsterns entstehen. Bei einem Außenwinkel von 108 Grad ergibt sich erst nach dem dritten Durchlauf eine geschlossene Figur, ein 10-Eck. Als Anregung für den Lehrer seien folgende Aufgaben gedacht: Schließt sich die Figur bei Vorgabe eines beliebigen Winkels? Welchen Winkel muß ich für die zwei Arten des Siebensterns wählen? Zeige, daß es keinen Außenwinkel gibt, mit dem sich die Figur nach zweimaligem Umlaufen zu einem 10-Eck schließt.

4 Die zweite Aufgabe: regelmäßiges Sechseck als Innensechseck im Kreis

Aus Gründen der Schnelligkeit und der Genauigkeit der Konstruktion wird man ein regelmäßiges Sechseck mit Hilfe des Zirkels zeichnen: der Radius eines Kreises wird sechsmal auf der Peripherie abgetragen. Nach einer Vorführung an der Tafel und einigen Übungen im Heft müssen auch hier die Schüler begründen, daß das sechsmalige Abtragen genau am Startpunkt endet. Die erste Aufgabe wird also in umgekehrter Richtung aufgegriffen. Als Argumente werden gleichschenklige Dreiecke, die Gleichseitigkeit gleichwinkliger Dreiecke, die Winkelsumme und natürlich wieder der Grundgedanke der Symmetrie herangezogen, der durch Falten aktiv nachvollzogen werden kann. Der Auftrag, nun einmal nach der neuen Methode ein regelmäßiges Zwölfeck zu zeichnen, wird wohl zunächst durch Abtragen des halben Radius zu erfüllen versucht. Da dies nicht zum gewünschten Ergebnis führt, werden die Schüler die Symmetrieachse über die Seitenmitten, die ja bereits bekannt ist, benutzen und mittels Geodreieck und rechtem Winkel die fehlenden Zwölferpunkte auf dem Kreis finden. Eine sehr interessante und die Schüler ansprechende Figur entsteht, wenn die Punkte durch einige oder auch alle Diagonalen verbunden werden. (Fig. 5) Will man einen Ausflug in kombinatorische Fragestellungen anschließen, kann man die Vielzahl der Zwölfecksdiagonalen motivierend nutzen: „Wie viele Diagonalen müßten wir beim 24-Eck zeichnen?" Dieses Problem kann durch die bekannte Hände-Schüttel-Aufgabe ergänzt werden. Ästhetisches Empfinden wird angesprochen und die Präzision des Arbeitens mit dem Zirkel wird geübt, wenn nun die Kreisbogenfiguren als Blumenmuster gezeichnet und ausgemalt werden. (Fig. 6 und 7) Parkettierungen sind den Schülern aus der Grundschule bekannt; ein Parkett mit Sechsecken oder Sechssternen vielleicht noch nicht. Läßt man den Schülern Freiheit beim Ausmalen des Blumenmusters, so nehmen sie mehrere Farben. Nun zerstört die Unsymmetrie der Farbgebung die Symmetrie der Linien.

Fig. 5



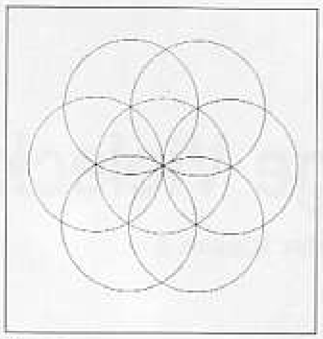


Fig. 6

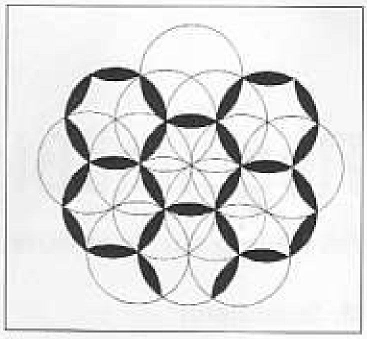


Fig. 7

5 Die dritte Aufgabe: Seitenmitten des Innensechsecks verbinden

Verbindet man die Seitenmitten des regelmäßigen Sechsecks, so entsteht bei Fortsetzung des Verfahrens eine Figur (Fig. 8) mit sehr großer Dynamik. Die Analyse der genau gezeichneten Figur läßt Senkrechte zu Seiten entsprechender Sechsecke erkennen, wenn man die Sechseckpunkte in Richtung Mitte verbindet. Die abwechselnde Parallelität der Seiten kann je nach Definition begründet werden, sicher wird die Ähnlichkeit der Figuren erwähnt, doch kann dieser Bereich nicht problematisiert werden.

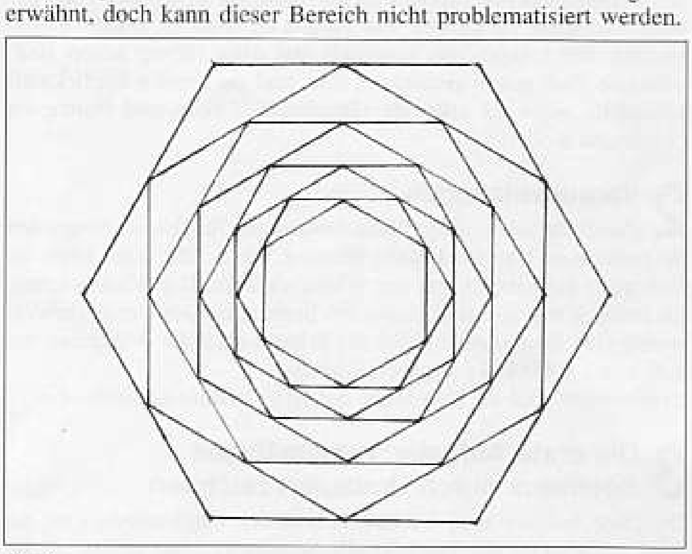


Fig. 8

6 Die vierte Aufgabe: Um einen Kreis ein Außensechseck zeichnen

Kehrt man die dritte Aufgabe um, und verlangt die Zeichnung eines Außensechsecks, so wird den Schülern die Lösung nicht schwerfallen, wenn die Eigenschaften der Reihe der Innensechsecke ausführlich diskutiert worden sind. Die Konstruktion über die Mittelsenkrechte als Hilfslinien führt sofort zum Ziel. Gibt man allerdings nur einen Kreis vor, ist die Kreativität der Schüler stärker gefordert. Sie werden verschiedene Lösungsideen entwickeln, deren Ungenauigkeit besprochen werden muß, aber sie werden auch auf die Idee kommen, daß aus Symmetriegründen eine berührende Gerade senkrecht zum Radius stehen muß. Nimmt man unscharfe Ausdrucksweisen in Kauf, so können die Schüler die Erkenntnisse im Satz vom Senkrechtstehen von Tangente und Radius und dem Kehrsatz selbst formulieren.

7 Die fünfte Aufgabe: Ein Kugellager konstruieren

Zwei Platten sollen durch dichtliegende Kugeln auf Abstand gehalten werden; gegeben ist der Abstand, zeichnerisch zu ermitteln ist die Lage der Kugeln. Erfahrungsgemäß finden die Schüler ohne Hilfe des Lehrers nach einigem Probieren die exakte Lösung: (Fig. 9) die Mittelparallele liefert den Radius, der dann wiederholt auf der Mittelparallelen abgetragen die Lage der Kreis/Kugelmitten und der Berührungspunkte der Kugeln festlegt.

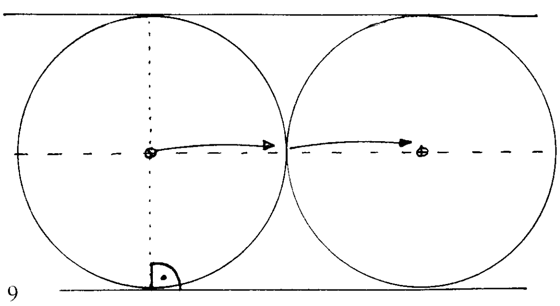


Fig. 9

Nun sollte ein Lager zwischen zwei gegebenen konzentrischen Kreisen eingefügt werden. Die sinngemäße Übertragung der Lösung führt nicht zu brauchbarem Ergebnis, da sich die Kreise durchdringen. (Fig. 10) Um dies an der Zeichnung erkennen zu können, wählt man günstige Radien wie zum Beispiel 2 cm und 6 cm für die beiden Kreise. Eine gründliche Fehleranalyse und die Überlegung, welche Bedingungen denn die Kugeln erfüllen

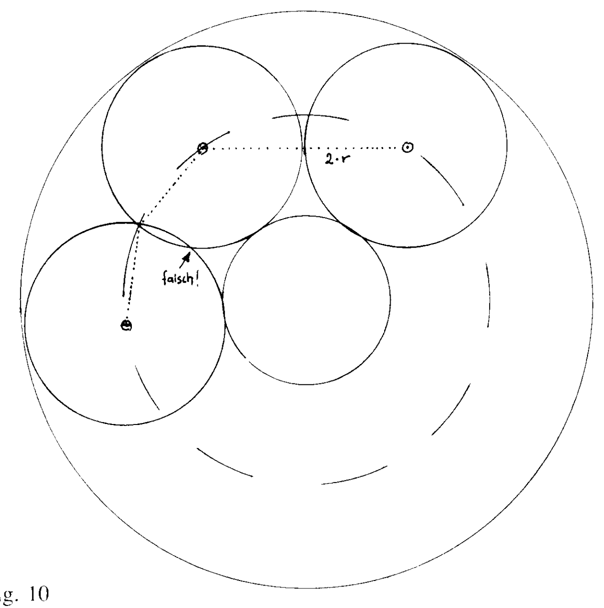


Fig. 10

müssen, führt mit Hilfe des Lehrers zu der Erkenntnis, daß die Mitten der Kugeln um den doppelten Radius voneinander entfernt sein müssen, wenn sich die Kugeln gegenseitig berühren sollen. Jetzt ist die Konstruktion möglich, das Kugellager wird aber nicht für alle Kreiskombinationen vollständig auszufüllen sein. Als Variation der Aufgabe bietet sich an, den Kreis der Mittelpunkte und die Anzahl der Kugeln vorzugeben, die spezielle Lage der Mitten und den Kugeldurchmesser (und damit Außen- und Innenkreis) für ein vollständig ausgefülltes Kugellager bestimmen zu lassen. Dies führt zur Konstruktion des n-Ecks zurück, die sich mit Zirkel und Winkelmesser leicht verwirklichen läßt. Die dritte Variante der Aufgabe sieht die Anzahl der Kugeln und den Kugeldurchmesser als gegeben an und verlangt die Bestimmung des Mittenkreises. Einige Schüler werden die Lösung über die Konstruktion des gleichschenkligen Mittelpunktsdreiecks aus Winkel-Seite-Winkel finden. Die Lösung gelingt aber auch mit Hilfe der Umlaufkonstruktion des regelmäßigen n-Ecks. Und damit schließt sich auch der „Kreis" dieses Aufsatzes.

Will man im Unterricht diese Reihe „schön" ausklingen lassen, so bieten sich die folgenden Figuren an, die auf der 24-Teilung des Kreises aufgebaut besonders eindrucksvoll sind. Um jeden der 24 Teilpunkte wird ein Kreis mit je gleichem Radius gezeichnet, der aber kleiner (Fig. 11) oder größer (Fig. 12) ist als der Radius des Umkreises des 24-Ecks; und: man wählt einen der 24 Teilpunkte als Festpunkt und zeichnet um jeden der anderen 23 Punkte einen Kreis, der den Festpunkt enthält (Fig. 13), eine wegen der notwendigen Präzision des Zeichnens nicht leicht zu erstellende Figur, deren Hüllkurve Kardioide genannt wird.

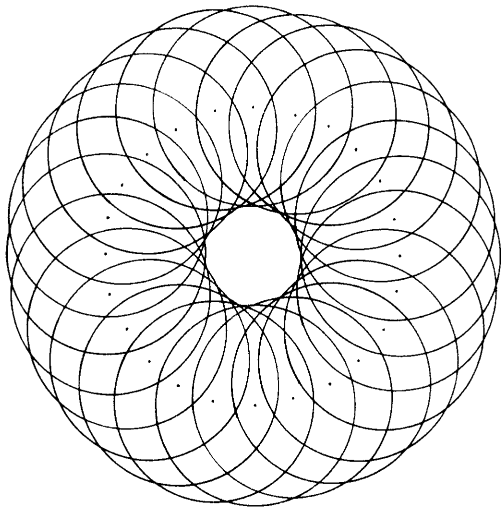


Fig. 11

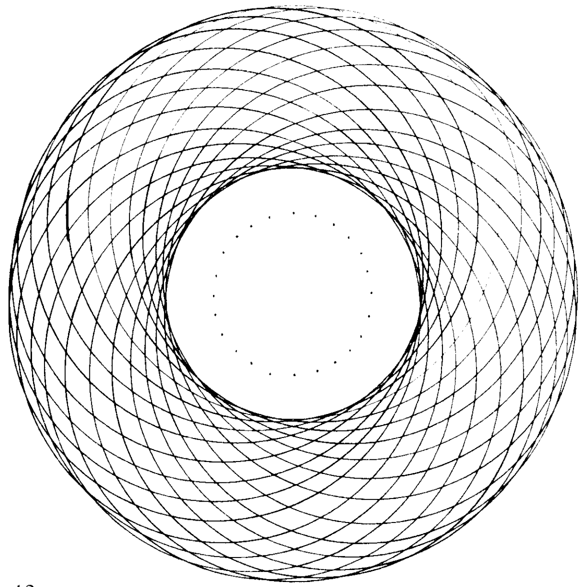


Fig. 12

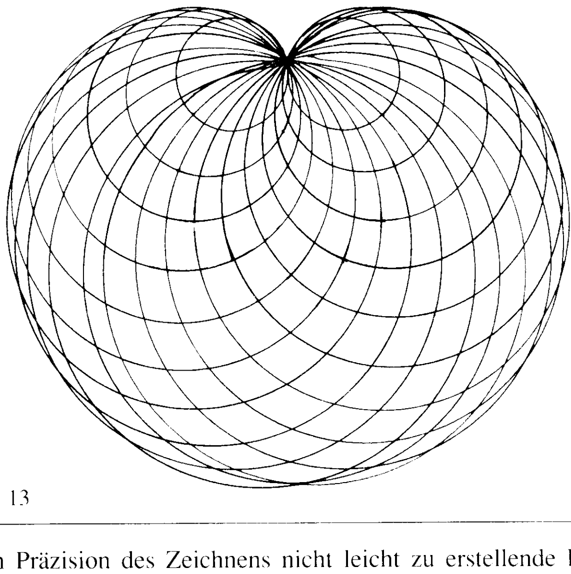


Fig. 13

Anschrift des Verfassers:

OStR Michael Spielmann, Wolfgangstr. 14, 5650 Solingen 1