Winkel am Kreis

Ein Beitrag zur Geometrie der Klasse 8

M. Spielmann

1 Einleitung

Die Behandlung des Umfangswinkelsatzes und seiner Umkehrungen bietet in der Klasse 8 eine günstige Gelegenheit, sowohl die Argumentationsfähigkeit der Schüler weiterzuentwickeln, als auch das ästhetische Empfinden und die Freude an geometrischen Formen zu fördern. Ich habe die „Scheinwerfer- und Blickwinkel-Aufgaben" immer als etwas gekünstelt empfunden und mich daher nach einer innermathematischen Motivation umgesehen.

2 Voraussetzung und Ziele

Es ist günstig für den Ablauf dieser Sequenz, wenn die Schüler den Außenwinkelsatz und den Satz des *Thales* kennen.

Die Schüler sollen lernen, geometrische Sätze und deren Umkehrung zu vermuten, zu formulieren, zu beweisen und in ein System einzuordnen.

3 Die Entdeckung des Umfangswinkelsatzes

Es gibt zwei sehr anregende Figuren (Fig. 1 und 6), die zur Vermutung des Umfangswinkelsatzes führen. Jede einzelne hat ihren Reiz und ihre spezifischen Vorzüge. Sie sollten beide in den Unterrichtsgang eingebunden werden.

Ausgangspunkt der Überlegungen sei zunächst die Figur 1, die aus der 12-Teilung des Kreises durch Verbinden eines festen

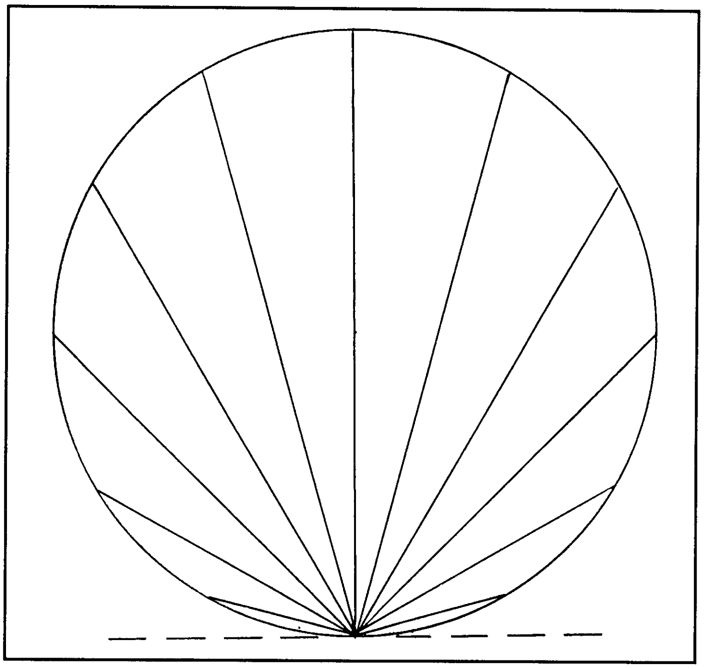


Fig. 1

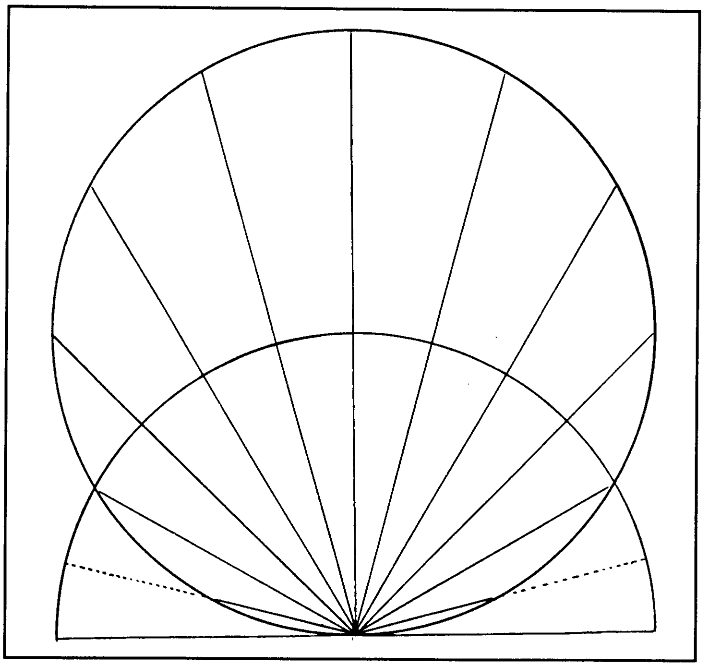


Fig. 2

Punktes mit allen anderen Punkten entsteht. Im allgemeinen wird beobachtet, daß die Strahlfigur gleiche Winkel enthält; dies wird durch Messen bestätigt. Die Sehnen werden kürzer, je weiter sie aus der Mittenlage herausgedreht werden; stellt man sich die Strahlen über den Kreis hinaus verlängert vor, fällt auf, daß eigentlich ein Abschluß durch die Tangente fehlt. (Fig. 2) Nun kann die Tangente den Durchmesser eines Halbkreises mit gleichgroßem Radius tragen, der durch die Strahlen in zwölf gleiche Abschnitte geteilt wird. Führt man die Mittelpunkte zusammen, erhält man so eine 24-Teilung. Stellt man sich andererseits die Strahlenfigur (Fig. 3) als Ausgangspunkt vor und fügt einen Kreis ein, so wird der Kreis bei nur zwei bestimmten Lagen, nämlich gerade in den gezeichneten, gleichmäßig geteilt. Der Mittelpunkt muß im Zentrum der Strahlfigur liegen, dann erhalten wir Mittelpunktswinkel; oder ein Randpunkt muß Zentrum der Strahlfigur sein, sodaß Umfangswinkel entstehen.

Dieses Sammeln von Eindrücken und Beobachten von Zusammenhängen läßt die Schüler unter Umständen den „roten Faden“ vermissen. Es wird also Zeit, die Beobachtungen je in einen geometrischen Satz zu kleiden. „Gleichgroße Kreisabschnitte erzeugen gleichgroße Winkel am Mittelpunkt des Kreises (Mittelpunktswinkelsatz).“ Und: „Die Winkel an der Peripherie sind halb so groß wie die zugehörigen am Mittelpunkt (Halbwinkelsatz).“ Und weiter: „Gleichgroße Kreisabschnitte erzeugen gleichgroße Winkel an der Peripherie des Kreises (Umfangswinkelsatz).“ Eine erste Umkehrung dieses Satzes wird formuliert: „Gleichgroße Winkel an der Peripherie des Kreises erzeugen gleichgroße Kreisabschnitte (1. Umkehrung Umfangswinkelsatz).“

Fig. 3

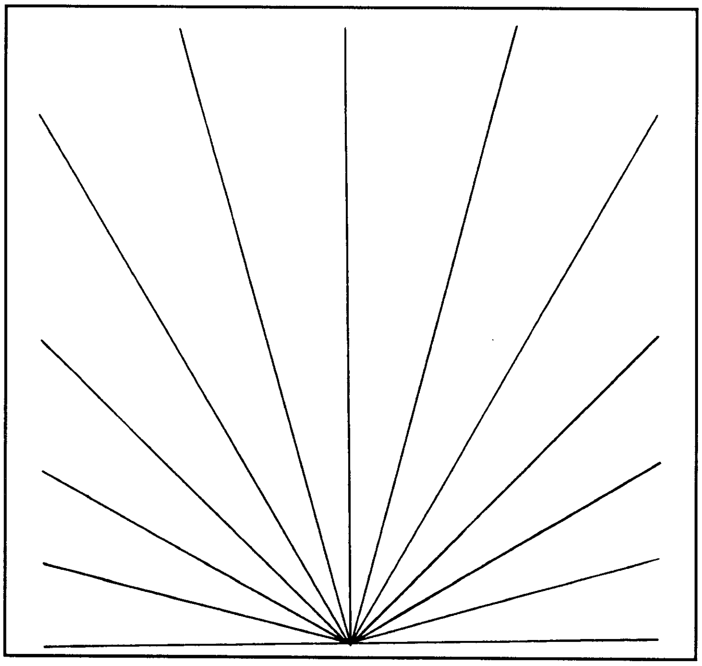
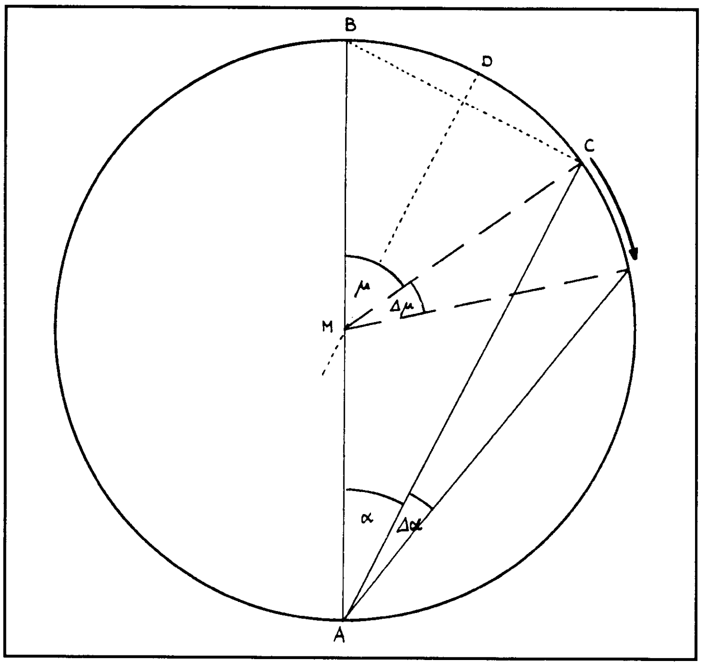


Fig. 4



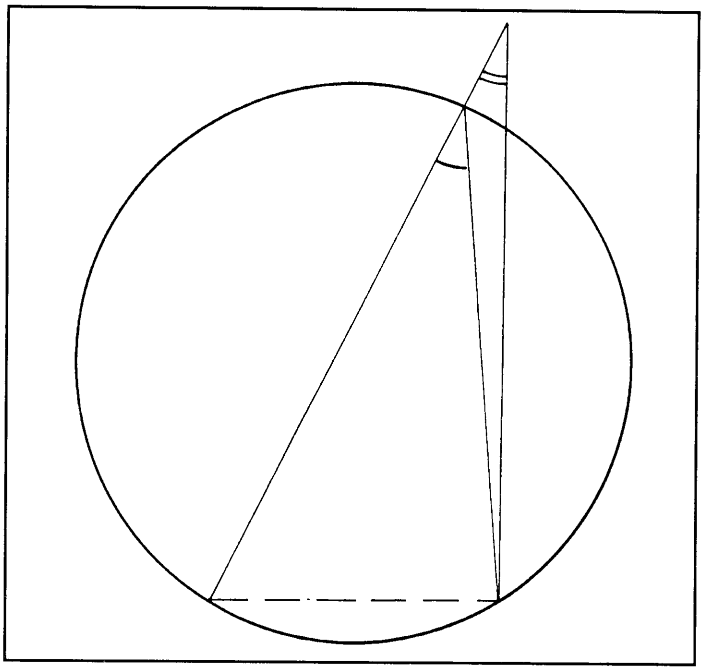


Fig. 8

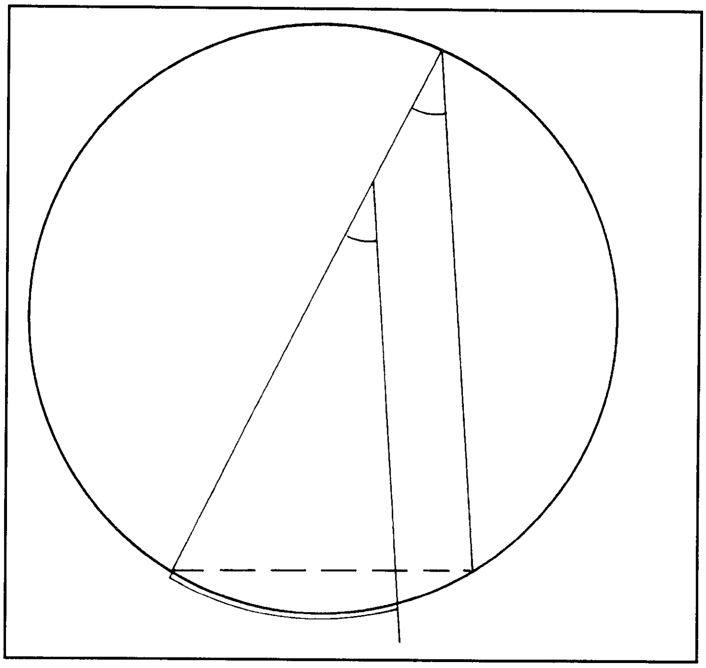


Fig. 9

an. Zunächst wird beobachtet, daß gleiche Winkel an der Peripherie entstehen; aber das ist ja inzwischen bekannt. Es entstehen aber auch gleiche Winkel an den Schnittpunkten der Schenkel, und diese Winkel werden von Stufe zu Stufe größer. Außerdem scheinen die Schnittpunkte der jeweiligen Stufe auf einem Kreisbogen zu liegen.

Daß bei gleichmäßiger Teilung die Winkel auf einer Stufe gleichgroß sind, zeigen die Schüler selbständig, nachdem sie zwei Winkelfelder herausgezeichnet haben. (Fig. 7) Anwendung des Umfangswinkelsatzes und des Außenwinkelsatzes führt zum Ziel. Bei der Argumentation muß aber klargemacht werden, daß erst die gleichmäßige Teilung eine Anwendung des Umfangswinkelsatzes ermöglicht.

Jetzt bedarf es gründlicher Analyse der Behauptung, daß die Schnittpunkte auf einem Kreis liegen. Die Schüler sollen erkennen, daß hier eine zweite Umkehrung des Umfangswinkelsatzes vorliegt.

Wenn der Beweis hierzu nicht erbracht werden soll, so muß doch herausgearbeitet werden, was vorausgesetzt, was behauptet wird. Wie ist es überhaupt möglich, daß ein Satz zwei Umkehrungen besitzt?

7 Die logische Struktur der Sätze und Umkehrungen

Eine Analyse der logischen Struktur liefert folgende abstrahierende, aber klärende Formulierung:

Umfangswinkelsatz: (A und B) $\Rightarrow C$

(„Scheitel auf Kreis" und „gleiche Sehne") $\Rightarrow$ „gleiche Winkel"

erste Umkehrung: (C und A) $\Rightarrow B$

(„gleiche Winkel" und „Scheitel auf Kreis") $\Rightarrow$ „gleiche Sehne"

zweite Umkehrung: (C und B) $\Rightarrow A$

(„gleiche Winkel" und „gleiche Sehne") $\Rightarrow$ „Scheitel auf Kreis"

Fig. 10

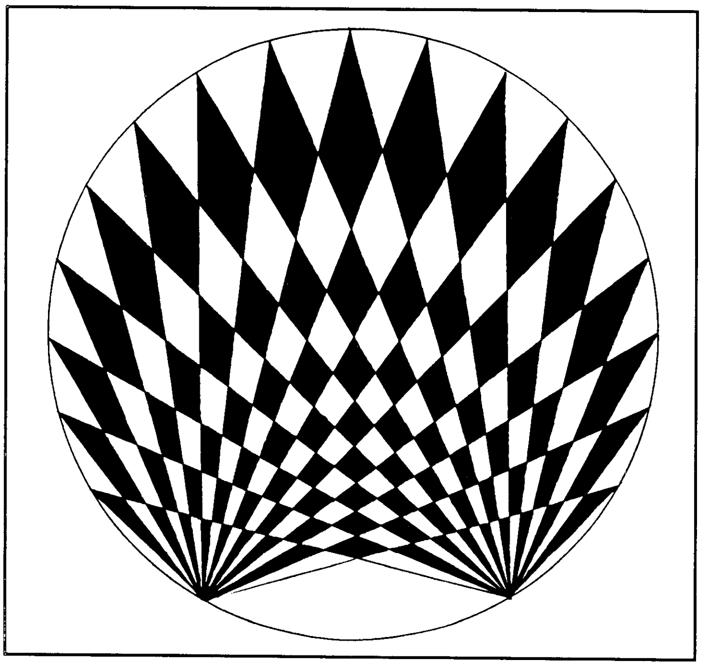
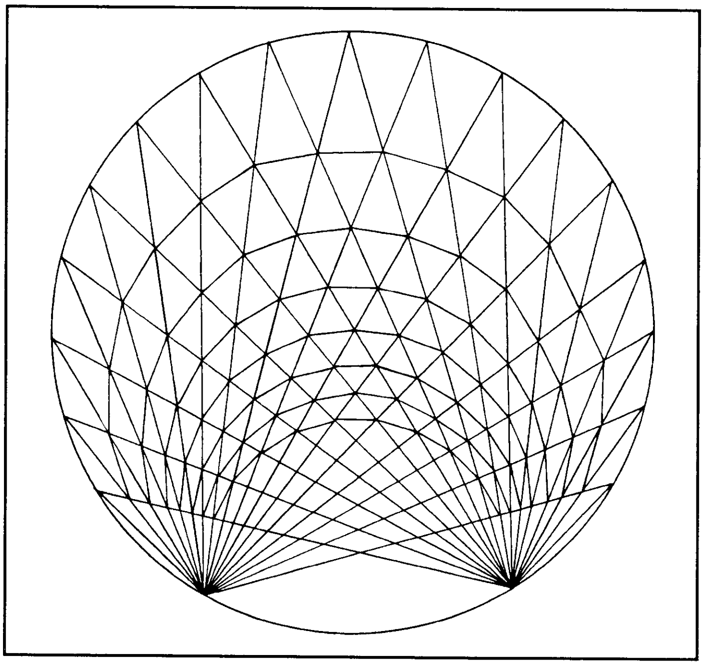


Fig. 11



Die Problematik liegt also in der Kombination der Voraussetzungen. Haben die Schüler schon früher Kontrapositionen und indirekte Beweise kennengelernt, werden sie den Beweis der zweiten Umkehrung argumentativ durcharbeiten können. (Fig. 8) „Liegen die Scheitel nicht auf einem Kreis, ist aber die eingefaßte Sehne gleich, so können die Winkel nicht gleich sein;" oder (Fig. 9) „Liegen die Scheitel nicht auf einem Kreis, sind aber die Winkel gleich, so ist die eingefaßte Sehne nicht gleich."

8 Ausblick

Als Belohnung für die erlebte Mühe und als Anregung zu weiterer Auseinandersetzung mit der äußeren Ästhetik der geometrischen Figuren kann man selbst den Schülern eines 8. Schuljahres Freude mit der Bearbeitung einer vorgegebenen 24-Teilung machen. (Fig. 10) (Fig. 11)

Anschrift des Verfassers:

StD Michael Spielmann, Wolfgangstraße 14, 42655 Solingen 1