

Die Summe natürlicher Zahlen

Michael Spielmann

1 Die Aufgabe und ihr didaktischer Wert

Wenn bei der im Unterricht zu verarbeitenden Stoffmenge noch Zeit für Besonderheiten bleibt, bietet sich eine Aufgabe an, die in der Geschichte der Mathematik als *Gauß-Aufgabe* bekannt geworden ist: Der Zehnjährige entwickelte eine Formel für die Summe der Zahlen von 1 bis 100. Diese Aufgabe kann in das Erstellen einer Treppe aus Bauklötzen eingekleidet werden; die Schüler sollen die Anzahl der Klötze bestimmen, die für eine Treppe mit 51 Stufen nötig sind, vielleicht liegen gerade 51 Stufen zwischen dem Schulhof und ihrem Klassenraum. Die Schüler sollen eine vorteilhafte Rechenmethode entwickeln, die ein schnelles Ermitteln der Anzahl der Klötzchen ermöglicht.

Die in der Aufgabe versteckten Möglichkeiten innermathematischer Anwendungen sind vielfältig; es kann der Mittelwertbegriff vertieft werden, oder geometrische und arithmetische Operationen werden verknüpft und liefern mit je neuen Aspekten verschiedene Lösungsstrategien. Dies führe ich weiter unten noch aus.

Die Schüler können an der Aufgabe die Fähigkeit entwickeln, Sachverhalte zu mathematisieren, sie werden angeleitet, über eigene mathematische Vorstellungen und Vermutungen zu sprechen und Sachverhalte abwägend zu prüfen.

Die Aufgabe ist so weittragend, daß ich in ihrem Umfeld geometrische und arithmetische Sichtweisen verdeutlichen kann. Da das Abstraktionsvermögen der Schüler unterschiedlich ausgeprägt bzw. fortgeschritten ist, sollte die Strategie der Lösung auch ikonographisch unterstützt werden. In unteren Klassenstufen kann die rein abstrakte algebraische Arbeit nicht im Vordergrund stehen, eine geometrische Veranschaulichung ist immer hilfreich, meistens zum vertieften Verständnis sogar notwendig. Daher also erhalten die Schüler die Möglichkeit, die Lösungsidee mittels Bauklötzen nachzuvollziehen, und zusätzlich wird an der Tafel und im Heft auf Quadratkästchen die Idee veranschaulicht.

2 Die Lösungswege

Wie aber bestimmt man die Summe? Es gibt verschiedene Zugänge zur Lösung.

Der erste benutzt die Ausgleichseigenschaft des arithmetischen Mittelwertes. Betrachtet man die geometrische Veranschaulichung, so kann auffallen, daß der obere Teil der Treppe genau den unteren Teil zu einem Rechteck ergänzt (Fig. 1). Dabei ist die Höhe des Rechtecks gleich der Mitte zwischen erster und letzter Stufe, und die Breite ist gleich der Anzahl der Stufen. Die arithmetische Sicht führt nach dem Aufschreiben der Zahlenreihe zu der Erkenntnis, daß man um die Mitte herum die Zahlen durch Subtrahieren und Addieren auf die Mitte hin beschneiden und ergänzen kann; dies entspricht natürlich genau dem Umbauen der Treppe.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & + & 8 & + & 9 \\
 (+4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & & - & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4) \\
 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 \\
 T_9 = 9 \cdot 5 = 45
 \end{array}$$

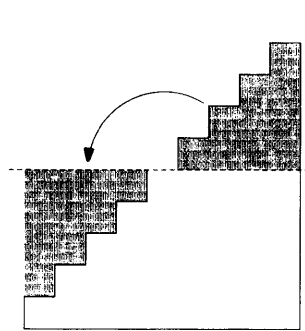


Fig. 1

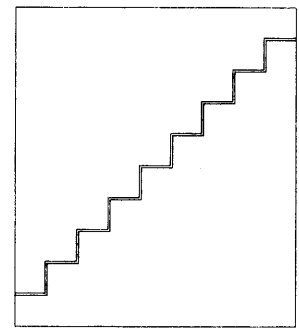


Fig. 2

Der zweite Zugang benutzt die Idee der Verdopplung und Halbierung. Geometrisch gesehen legt man eine zweite gleiche Treppenfigur umgekehrt auf die vorhandene (Fig. 2); man erkennt ein Rechteck, dessen Fläche nur noch halbiert werden muß. Arithmetisch gesehen wird die Zahlenreihe zweimal jeweils gegenläufig untereinander notiert; dies führt zu gleichen Summanden; die nun durch ein Produkt zu bestimmende gesamte Summe wird anschließend halbiert. Diese Lösung soll ja auch dem „kleinen“ Gauß eingefallen sein.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & + & 8 & + & 9 \\
 + & 9 & + & 8 & + & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 \\
 \text{also } T_9 = 9 \cdot 10 : 2 = 45
 \end{array}$$

Ein dritter Weg zur Lösung ergänzt die Dreiecksform der Treppe zu einem Quadrat, halbiert dessen Flächeninhalt und ergänzt den Wert mit den abgeschnittenen Zähnen (Fig. 3). Dieser geometrische Zugang hat aber leider keine direkte arithmetische Entsprechung. $T_n = n^2 : 2 + n \cdot 0,5$.

Ich habe die Erfahrung gemacht, daß diese Idee der Quadratergänzung von einigen Schülern sehr schnell genannt wird. Auf den Einwand hin, daß die Treppe größer als das halbe Quadrat ist, sehen diese Schüler dann oft, daß die Ergänzung natürlich wieder eine Treppe ist, die aber eine Stufe weniger umfaßt (Fig. 4). Dies führt zu einem vierten Weg, der den Gedanken der Rekursion beleuchtet. Die bekannte Formel erhält man nach wenigen Operationen.

Es gilt $T_{n-1} + n = T_n$ und $T_n + T_{n-1} = n^2$; daraus folgt durch Einsetzen $2 T_n = n^2 + n$, und somit $T_n = (n^2 + n) : 2$.

Fig. 3

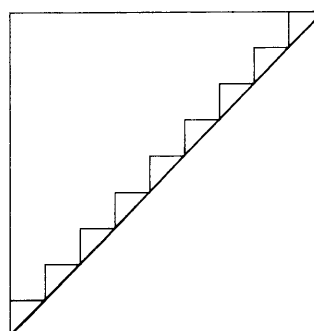
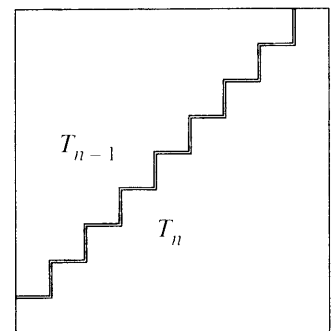


Fig. 4



3 Die Problemstellen

Die Thematik hat einige didaktische Problemstellen.

a) Die oben genannte Formel gilt zwar für gerade und ungerade Zahlen gleichermaßen, nur hat eine Treppe mit gerader Stufenzahl keine mittlere Säule. Das Umsortieren der Treppe ist also in diesem Fall nicht auf die gleiche Art möglich. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, starte ich mit der Frage für eine ungerade Stufenzahl. So wird der Zugang nicht überfrachtet, und an der später auftretenden Frage nach gerader Stufenzahl erkennen die Schüler, daß man Probleme in voller Allgemeinheit nicht immer in einem einzigen Schritt löst.

b) Die erste Strategie ist für die Veranschaulichung mit Klötzen gut geeignet, die zweite weniger gut, da sie die doppelte Anzahl erfordert. Meistens bevorzugten aber meine Schüler die zweite Strategie. Leider ist sie ohne weiteres für gerade und ungerade Stufenzahlen einsehbar, läßt also die produktive Schwierigkeit der fehlenden mittleren Säule gar nicht erst zu.

c) Die Veranschaulichung der ersten Strategie mit Klötzen versagt bei gerader Stufenzahl, denn die mittlere Höhe ist nicht ganzzahlig. Sie klappt gut bei der Darstellung mit Quadratkästchen, da man diese teilen kann.

d) Nach meiner Erfahrung neigen einige Schüler dazu, die Treppe fallend zu zeichnen; und sie zerschneiden dann die Treppe vertikal. Mit diesem Wandel des Aspektes muß man rechnen, er kann aber zur Kommunikation innerhalb der Klasse anregen.

e) Da die Aufgabe auf mehrere Arten lösbar ist, werden die Schüler also vielleicht verschiedene Lösungsgänge vorschlagen. In diesem Fall wird man wohl nur eine Möglichkeit vertieft behandeln, die anderen aber in einer der folgenden Stunden besprechen; die Vielzahl der Aspekte sollte den Schülern bewußt werden.

f) Sicher wäre es im Sinne einer offeneren Unterrichtsgestaltung wichtig, daß die Schüler bei tatsächlichem Addieren aller Zahlen von 1 bis 51 die Umständlichkeit und den Zeitaufwand erkennen; im Sinne der Ökonomie der Zeitgestaltung wird man aber schneller in die Denkarbeit einsteigen wollen. Vielleicht kann diese Entscheidung auch vom mathematischen Bewußtseinsstand der Schüler abhängig gemacht werden.

g) Sollte die Frage nach gerader Stufenzahl bei gutem Lösungsfortschritt von Schülern frühzeitig gestellt werden, können die etwas routinierteren Aufgabenlöser an dem Problem während der eigentlichen Übungsphase arbeiten. So wird ein etwas differenzierter Unterricht dem Begabungsspektrum gerecht.

4 Der größere fachliche Zusammenhang

Den Schülern sind Rechenvorteile der Addition und Subtraktion aus der Grundschule bekannt. Sie haben bereits beim Rechnen in der Nähe voller Hunderter geschickt ergänzt; nur wird dies bei der vorliegenden Aufgabe systematischer angewandt. Das arithmetische Mittel als Repräsentant für eine Reihe von Zahlen, als ausgleichender Wert bei Verteilungsaufgaben ist den Schülern im Verlauf der fünften Klasse begegnet. Sie haben auch erfahren, daß bei einer Zerlegung von Flächenformen die Flächengröße unverändert bestehen bleibt.

Alles dies wird mehr oder weniger bewußt benutzt werden müssen, was eine immanente Wiederholung, aber auch einen Wechsel in der Sichtweise bedeutet; beides sind für den Lernfortschritt wichtige Bedingungen.

Die Aufgabe bereitet aber auch zukünftiges vor. Es können sich Fragen nach unendlichen Prozessen anschließen, wenn man die gezeichnete Fläche der Treppe mit dem umfassenden Quadrat vergleicht. Trapezförmige Flächen werden mit der Mittelwertstrategie berechnet. Unvollständige Treppen zum Beispiel von Stufe 74 bis Stufe 163 tauchen später in der Oberstufe bei der Berechnung des bestimmten Integrals auf, bei dem man ja auch einen gleichartigen Anfang von dem Ganzen subtrahiert, um ein Zwischenstück zu errechnen. Eine Ausweitung der Frage auf Pyramiden führt zur Untersuchung dreidimensionaler Treppen oder zu Summen von Quadratzahlen. Zeitlich etwas näher liegt die Untersuchung arithmetischer Reihen, die bereits in den nachfolgenden Unterrichtsstunden mit unterschiedlicher Schrittweite bearbeitet werden können. Da auf dem aktuellen 10 DM-Schein *Carl Friedrich Gauß* porträtiert ist, wird man den Schülern in einem geschichtlichen Exkurs etwas aus dem Leben dieses großen Mathematikers erzählen, und dabei auch die Bedeutung der drei anderen Abbildungen auf dem Geldschein erläutern können, der Sextant, die Triangulation und die Normalverteilung. An der Antike interessierte Schüler wird man auf die Zahlenmystik der Pythagoräer hinweisen, von denen die Treppenzahlen als sogenannte Dreieckszahlen untersucht wurden.

5 Übungen zur Gaußaufgabe

In Übungsaufgaben wird man über die Standardaufgaben hinausgehen wollen. Dazu sollen die folgenden Beispiele anregen. Verspätet einsetzende Reihen wie $36 + 37 + 38 + 39 + 40$ können nach den ersten beiden Strategien ohne Formel bestimmt werden; werden sie verlängert und mit Pünktchen abgekürzt geschrieben wie $36 + 37 + \dots + 57 + 58$, erfordern sie zusätzliche Überlegung. Daß die Summe der natürlichen Zahlen sich nicht proportional entwickelt, wird den Schülern nach der folgenden Frage klar: Karls Treppe ist dreimal so hoch wie die Treppe von Jens; braucht Karl dann auch dreimal so viele Steine? Für große Zahlen ist der Zusammenhang fast quadratisch. Nicht so leicht zu beantworten ist die Frage, wie viele Stufen man mit einer festen Anzahl von Klötzen schafft; der geschulte Algebraiker löst eine quadratische Gleichung, ein Schüler der Unterstufe kommt schon ans Grübeln. Hierzu sind auch physikalische Aufgaben zum freien Fall mit konstanter Beschleunigung möglich. Wenn ein Körper in der ersten Sekunde 1 m, in der zweiten 2 m fällt und so weiter, läßt sich die Entfernung nach bestimmter Zeit ausrechnen; umgekehrt kann man auch die Fallzeit zu gegebener Strecke ermitteln.

Anschrift des Verfassers:

StD Michael Spielmann, Wolfgangstr. 14, 42655 Solingen